

强基计划物理篇

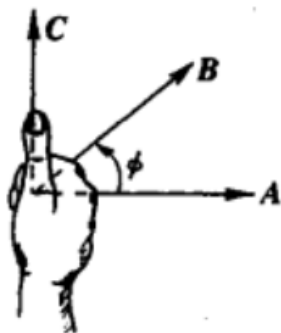
主编人：崔伟杰

(关注公众号：清北物理竞赛)

数学准备篇

因为强基计划的物理部分内容难度和深度高于高考要求，会涉及到部分高中数学未学习的内容。我们安排的授课内容将以这些数学知识作为开始部分。

1、矢量的叉乘



定义三维空间的两个矢量 \vec{A} 、 \vec{B} 的叉乘：

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

设矢量 \vec{A} 、 \vec{B} 之间的夹角为 θ ，则它们之间的大小满足关系：

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta$$

如左图所示，矢量 \vec{A} 、 \vec{B} 、 \vec{C} 之间方向满足右手螺旋法则，即右手手掌

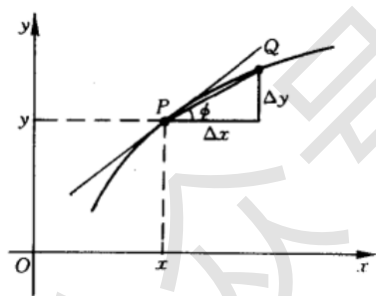
方向首先朝向矢量 \vec{A} ，接着转动四指朝向矢量 \vec{B} ，则叉乘得到的矢量 \vec{C} 的方向为右手大拇指的取向。

2、微分与导数

在高中阶段，我们学习了微积分相关的知识，但是并没有明确其真正的本质。如图所示，我们考虑一个函数，我们知道在函数上的 P 点附近取一点 Q 点，当 Q 点无限逼近 P 点时， PQ 连线便为 P 点处的

切线， P 点的导数随之定义为 P 点切线的斜率：

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



在物理中，我们经常会使用微元法，也就是等同这里 Δx 、 Δy 的构造方式。那么当所假设的小量无限趋近于0时，即和上述公式 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ 表述的含

义等同时，这些微小的变化量全部可以写成微分 dx 、 dy ，即导数可以

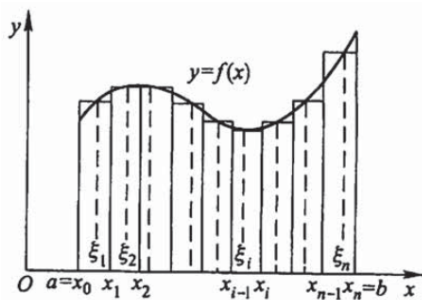
表示成微分求商的形式：

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

因此我们在后面利用微元法求解物理模型的时候，可以直接把微小的改变量写为微分形式，而后通过求商表述成导数运算求解即可。

dx 表示 x 这个变化量的极限，并没有具体的大小，而是表示自身变化量的极限其大小理论上趋于零，并且 Δx 在 x 趋于0的时候可以表示为 dx 。

3、积分



高中阶段学习了积分的内容，但是有些数学老师仅仅只是教学了积分的运算，甚至例如 $\int_0^1 x dx$ 积分表达式中的 dx 也跟大家说只是一个记号，这其实有悖我们学习理科的初衷。在这里可以给大家再次严谨地陈述一番。众所周知，积分其实是微分的逆运算，定积分最常见的应用是求解图像与自变量坐标轴围成的面积。如图所示，为了研究函数 $f(x)$ 与 x 坐标轴围成的面积，我们可以把面积如图分割成无

穷多个竖直的小矩形，每个矩形的高为 $f(x)$ ，宽为微分 dx ，因此小矩形的面积为：

$$dS = f(x) \cdot dx$$

因而得到围成面积满足的积分式：

$$S = \int_a^b dS = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

接下来的计算我们都掌握得游刃有余，但在这里面我们可以看出，积分式中的 dx 其实就是自变量的微分。因而在之后利用微元法求解某些复杂物理问题时，有些时候会通过微分式的积分而得到原函数的表达式，进而求解，这便是积分的真正含义所在。

4、小量近似与泰勒展开

在物理强基计划题目的计算过程中，我们经常会遇到小量近似相关的数学工具，常用到的两种小量近似如下：

(1) 当值 x 为一个小量时，有：

$$(1+x)^n = 1 + nx$$

(2) 当角度 θ 为一个小量时，有：

$$\sin \theta = \tan \theta = \theta$$

同时，更广泛的小量近似需要用到高等数学中的泰勒展开表达式：

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

例如，我们上文所述的小量近似(1)其实就是函数 $f(x) = (1+x)^n$ 在 $x=0$ 附近领域内的展开：

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$$

另外，我们要知道小量近似的核心思想：高阶小量比低阶小量小得多，因此只需要保留到最低阶的不为零的小量即可。

一、力学篇

1、运动学

1.1、抛体运动

(1) 斜抛运动过程中， x 和 y 方向的运动方程可以写作：

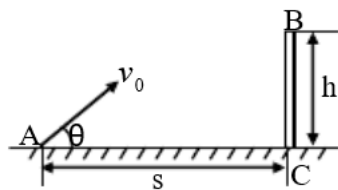
$$\begin{aligned}x &= v_0 t \cos \theta \\y &= v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2\end{aligned}$$

联立上式，消去 t ，得到轨迹方程：

$$y = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$$

(2) 对于速度最小值过墙问题，这里提供两种思路：1) 直接带入过墙临界点坐标，然后算出 $v_0(\theta)$ 函数，利用三角函数求极值的方法求出最小速度以及临界抛射角；2) 将 $\frac{1}{\cos^2 \theta}$ 看成 $(1 + \tan^2 \theta)$ ，将方程看成关于 $\tan \theta$ 的一元二次函数，利用判别式法求解最小速度以及临界抛射角。

例 1、从 A 点以 v_0 的初速度抛出一个球，在离 A 点水平距离为 s 处有一堵高度为 h 的墙 BC，要求小球能越过 B 点，问小球应以怎样的角度抛出，才能使 v_0 最小。



分析与解：利用轨迹方程，可得：

$$y = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} = -\frac{g x^2}{2 v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) + x \tan \theta$$

把方程看成关于 $\tan \theta$ 的一元二次方程，可得：

$$\frac{g x^2}{2 v_0^2} \tan^2 \theta - x \tan \theta + \frac{g x^2}{2 v_0^2} + y = 0$$

利用二次方程成立的判别式方法：

$$\Delta = \frac{x^2 - 4 \left(\frac{g x^2}{2 v_0^2} + y \right) \cdot \frac{g x^2}{2 v_0^2}}{\frac{g x^2}{v_0^2}} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g x^2}{v_0^2} - 2y \geq 0$$

最小 v_0 对应临界情况，即 $\Delta = 0$ ，且过 B 点有 $x = s$ ， $y = h$ ，因此有：

$$v_0^4 - 2g y v_0^2 - g^2 x^2 = 0$$

解得：

$$v_0^2 = g(h + \sqrt{h^2 + s^2})$$

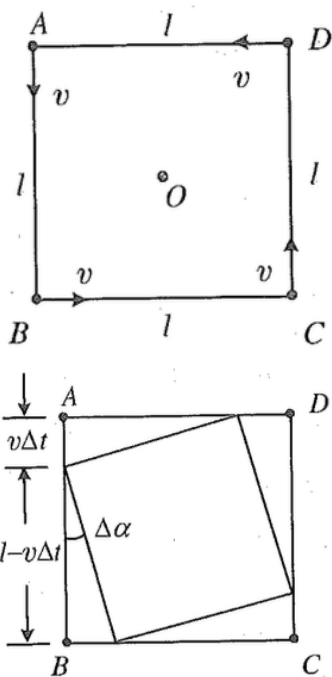
带入得 θ 角满足：

$$\theta = \arctan \left(\frac{h + \sqrt{h^2 + s^2}}{s} \right)$$

1.2、运动学中的微元法

很多时候，我们需要灵活运用微元法去解决相应的运动学过程问题。微元法是物理问题求解过程中必不可少的一环，因为牛顿—莱布尼茨积分公式阐述的就是函数与 x 坐标轴围成面积可以分割成一个一个小矩形面积元，叠加成总面积，即构成我们所熟知的积分形式。因此物理问题中微元法可以让我们分割地去分析一个小过程，将小过程的微分方程求出，随后利用积分的方式求解问题。

例 2、A、B、C、D 四个小孩分别站在正方形的四个顶点，以相同的不变速率 v 作追逐游戏，A 追 B，B 追 C，C 追 D，D 追 A，每个小孩始终对准自己的追逐目标运动。设 $t = 0$ 时，正方形边长 l ，如图。求：(1) 经过多长时间追上？(2) $t = 0$ 时，每个小孩的加速度。



分析与解：(1) 利用微元法即可，画出几何关系图 (2) 画出微元过程的速度变化量

(1) 参考下图可知，经过 dt 时间，每个小孩均运动 $dx = v \cdot dt$ ，此后，四个小孩仍然位于正方形四个顶点处，不难发现，新正方形边长变为：

$$l' = l - v \cdot dt$$

因此边长缩短的速率为 v ，最后四个小孩运动至同一点，总时间为：

$$t = \frac{l}{v}$$

(2) $t = 0$ 时，经过 dt 时间，速度 \vec{v} 矢量转过角度：

$$d\theta = \frac{v \cdot dt}{l}$$

因此速度变化量：

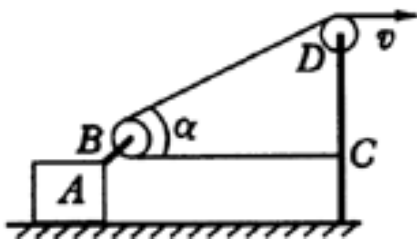
$$dv = v \cdot d\theta = \frac{v^2 \cdot dt}{l}$$

加速度：

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{l}$$

当然，此方法也可以推广到对称的其他几何图形的题目，如三角形、正六边形等等，需要利用微元法去找其他几何图形的变量关系。

例3、如图，物体A置于水平面上，物体A上固定有动滑轮B，D为定滑轮，一根轻绳绕过滑轮D、B后固定在C点，BC段水平。当以速度 v 拉绳头时，物体A沿水平面运动，若绳与水平面夹角为 α ，物体A运动的速度是多大。



分析与解：依旧微元法，要注意绳长减少还包括BC边的减少量。

假设经过 dt 时间，B滑轮往右平移小段位移 $dx = v_A dt$ 。那么绳缩短的长度一方面是由BC距离变短引起缩短

$$dl_1 = v_A dt$$

另一方面斜边BD也缩短：

$$dl_2 = v_A dt \cos \alpha$$

因此绳长总缩短速率即为拉绳头速度 v ：

$$v = \frac{dl_1 + dl_2}{dt} = v_A(1 + \cos \alpha)$$

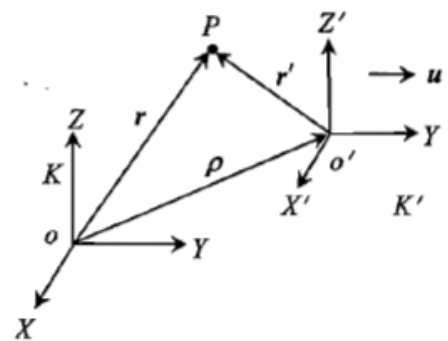
解得A运动速度：

$$v_A = \frac{v}{1 + \cos \alpha}$$

1.3、平动参考系的相对运动

(1) 平动参考系指的是动系 K' 的坐标轴在运动过程中均不发生偏转的参考系，与之相反的称为转动参考系。

(2) 相对运动是运动学中的一个十分重要的概念，它教会我们如何用参考系变换的方式去求解物体不易直接求解的运动。如图，对于静系 K 以及动系 K' 质点P有以下关系：



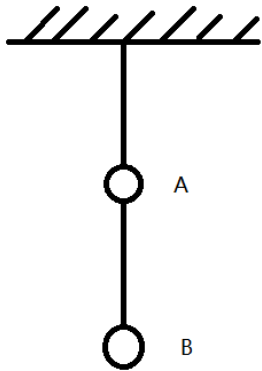
$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{\rho}, \quad \vec{x}_{\text{绝对}} = \vec{x}_{\text{相对}} + \vec{x}_{\text{牵连}}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \quad \vec{v}_{\text{绝对}} = \vec{v}_{\text{相对}} + \vec{v}_{\text{牵连}}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}, \quad \vec{a}_{\text{绝对}} = \vec{a}_{\text{相对}} + \vec{a}_{\text{牵连}}$$

我们可以先用人在小车上走动的模型去直观理解位移的坐标变换，接着位移变换关系式对时间求导便可以依次得到速度以及加速度的变换关系。

例 4、天花板下用长度为 l_1 的绳子悬挂着球 A，球 A 下方用长度为 l_2 的绳子悬挂着球 B。已知球 B 的质量为 m 。某时刻，球 A 有水平向右的速度 v_1 ，球 B 有水平向右的速度 v_2 ，求连接着 A、B 两球的绳子上的拉力 T



分析与解：首先 A 有一个向上的加速度

$$a_A = \frac{v_1^2}{l_1}$$

以 A 为参考系，B 的速度为 $(v_1 - v_2)$ ，则对应的相对加速度方向向上：

$$a_{rB} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{l_2}$$

对 B 受力分析，以 A 为参考系，需要附加上惯性力 $-m\vec{a}_A$ ，因此竖直方向：

$$T - m \frac{v_1^2}{l_1} - mg = ma_{rB}$$

即：

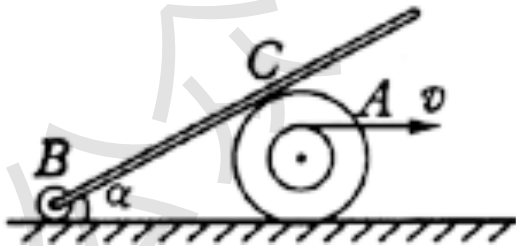
$$T = m \left(g + \frac{v_1^2}{l_1} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{l_2} \right)$$

1.4、物系相关速度

(1) 杆或绳约束物系：由于杆以及绷紧的绳长度始终不变，因此在同一时刻其两端连接物体必具有相同的沿杆或绳方向的分速度。

(2) 接触物系：由于接触物体沿着接触面法向不会发生相对移动，因此两接触物体沿接触面法向的分速度必定相同，同理沿接触面切向的分速度在无相对滑动时相同。

例 5、如图，线轴沿水平面做无滑动的滚动，并且线端 A 点速度为 v ，方向水平。以铰链固定于点 B 的木板靠在线轴上，线轴的内、外径分别为 r 和 R 。试确定木板的角速度 ω 与角 α 的关系。



分析与解：首先纯滚条件：

$$v = \omega'(R + r)$$

ω' 为线轴纯滚的角速度。其次杆与线轴在 C 处相切，因此杆与线轴在 C 处沿法线方向速度一致。杆在 C 处沿法线方向的速度为：

$$v_1 = \frac{d\alpha}{dt} \cdot R \cot \frac{\alpha}{2} = \omega R \cot \frac{\alpha}{2}$$

利用了 $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ 这一特性。线轴在 C 处沿法线方向速度用速度合成公式：

$$v_2 = \omega' R \sin \alpha$$

则利用 $v_1 = v_2$ 可以得到：

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v}{R+r} \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{R+r} (1 - \cos \alpha)$$

即：

$$\omega = \frac{v}{R+r} (1 - \cos \alpha)$$

公众号：清北物理竞赛

2、动力学

2.1、惯性力

我们把无加速度的参考系称为惯性系，把有加速度的参考系称为非惯性系。惯性力是针对在非惯性系中研究动力学的一种等效方式，因此以下分析只面向非惯性系的动力学研究。

(1) 平动参考系：

在运动学中我们讲到，对于平动参考系有： $\vec{a}_{\text{绝对}} = \vec{a}_{\text{相对}} + \vec{a}_{\text{牵连}}$ 。若用 \vec{a} 表示质点在静系 K 中的绝对加

速度， \vec{a}' 表示质点在动系 K' 中的相对加速度， \vec{A} 代表 K' 系相对 K 系的牵连加速度，即有 $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$

设质点受到的外力为 \vec{F} ，在 K 系中列出牛顿第二定律：

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{A}$$

将 $m\vec{A}$ 项移至方程左侧：

$$\vec{F} - m\vec{A} = m\vec{a}'$$

也就是说，如果想要在 K' 系中列出牛顿第二定律，需要在原外力的基础上附加上额外的 $-m\vec{A}$ 这一项等效力。那么定义平动惯性力 $\vec{F}_{\text{惯}} = -m\vec{A}$ ，我们有：

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{惯}} = m\vec{a}'$$

(2) 转动参考系：

在转动参考系中，由于转动系 K' 与静系 K 加速度变换较为复杂，我们下面只介绍两种惯性力：惯性离心力与科里奥利力。

1) 惯性离心力：考虑绳拉着质量为 m 小球在桌面做半径为 r ，角速度为 ω 的匀速圆周运动的模型，建立一个转动参考系与小球同步转动，那么小球在转动系 K' 中静止。在地面系中分析小球受力，绳子张力将提供向心力 $m\omega^2 r$ 。但在 K' 中，只有附加上沿着径向向外的惯性离心力 $m\omega^2 \vec{r}$ ，才能做到与绳子张力共同受力平衡而静止。由此我们得到转动参考系中的一个惯性力——惯性离心力：

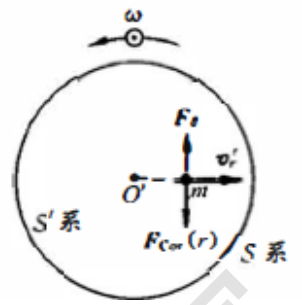
$$\vec{F}_{\text{惯离}} = m\omega^2 \vec{r}$$

2) 科里奥利力：设转动系 K' 相对静系 K 的角速度为 $\vec{\omega}$ ，质量为 m 的质点在转动系 K' 中的相对速度为 \vec{v}' 直接给出科里奥利力的表达式：

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

科里奥利力在解释一些地球上的物体在运动时发生“异常”偏转的物理现象十分有用。下面我们举一个经典的例子说明——北半球河床右岸受较强冲刷。

首先我们建立转动系 K' ，使得它与地球具有相同的角速度，此时地球在 K' 系中静止，那么人在观察地球上物体的速度就是 K' 系中的相对速度 \vec{v}' 。将右图设想成从北极高空所得的北半球俯视图，从北向南的河流中河水有图示的径向速度 \vec{v}'_r ，对应的科里奥利力 $\vec{F}_{Cor}(r)$ 指向河床右岸，平衡此力的必定是右岸对河水的真实推力 \vec{F}_θ 。因此河水对右岸的反作用力形成了可观察到的河床右岸受较强冲刷的现象。



例 6、(2020 清华强基) 在悉尼、北京、赤道上空分别静止释放一重物，物体下落时的偏转情况为 (A)

- A、悉尼处偏东、北京处偏东、赤道处偏东
- B、悉尼处偏东、北京处偏西、赤道处不偏转
- C、悉尼处偏西、北京处偏东、赤道处不偏转
- D、悉尼处偏西、北京处偏西、赤道处偏西

分析与解：利用科里奥利力 $\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ ，来分析物体下落时的偏转情况即可。

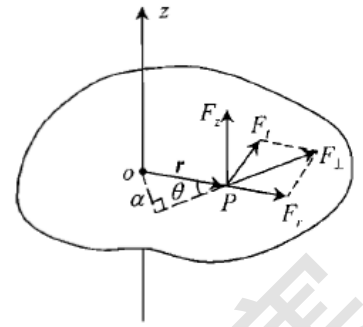
3、静力学

3.1、力矩

力矩：力矩在初中接触过，当时定义为力乘以力臂，并未涉及到矢量的概念，此处引入力矩矢量的概念，定义为：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

其中 \vec{r} 为参考点到力作用点的矢径， \vec{F} 为作用力矢量。



3.2、三力汇交与摩擦角

(1) 三力汇交原理：若一个物体处于平衡状态，有且仅有三个力作用，那么这三个力的作用线必定汇交于同一点。这是因为如果三力不汇交于同一点，那么以其中两个力作用线的交点为参考点，第三个力会产生净力矩，使其不能平衡。

(2) 摩擦角：

在研究粗糙平面上物块受外力作用下的运动问题中，对物块受力分析有外力、重力、支持力以及摩擦力四个力。但我们所熟知的矢量三角形分析法要求物体只受三个力作用，那么我们可以将支持力 \vec{N} 与摩擦力 \vec{f} 矢量合成视作一个力，定义其为全反力 $\vec{R} = \vec{N} + \vec{f}$ 。接着定义摩擦角 θ 为全反力 \vec{R} 与支持力 \vec{N} 之间的夹角，即 $\theta = \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle$ 。利用摩擦力 f 与支持力 N 以及动摩擦因素 μ 的约束条件 $f \leq \mu N$ 可知：

$$\theta \leq \arctan \mu$$

当摩擦力为动摩擦力时取等号，我们将 $\theta_m = \arctan \mu$ 称为动摩擦角。通过引入全反力和摩擦角的概念，我们便可以将四力问题转化为三力问题。

3.3、一般物体的平衡

对一个物体或者物体体系而言，其平衡需要同时满足合外力为零以及合外力矩为零两个条件。

(1) 合外力等于0——不移动

在直角坐标系中有 $\sum F_{ix} = 0$ ， $\sum F_{iy} = 0$ ， $\sum F_{iz} = 0$

(2) 合外力矩等于0——不转动

在直角坐标系中有 $\sum M_{ix} = 0$ ， $\sum M_{iy} = 0$ ， $\sum M_{iz} = 0$

例 7、质量为 m 的小物块静止在倾角为 θ 的斜面上，二者之间的摩擦因数为 μ ，现给小物块施加外力 T ，使之能沿斜面向上运动，求最小的外力 T

分析与解：直接分析重力、全反力、外力 T ，三力构成矢量三角形，然后用矢量图解法即可。

小物块沿着斜面向上运动，受到摩擦力沿斜面向下，重力与全反力之间的夹角为 $\theta + \varphi$ ，其中 φ 为摩擦角 $\arctan\mu$ 。因此最小外力 T 为：

$$T = mg \cdot \sin(\theta + \varphi)$$

带入即得：

$$T = \frac{mg}{\sqrt{\mu^2 + 1}} (\sin\theta + \mu \cos\theta)$$

例 8、半径为 R 的 $1/4$ 光滑圆柱面固定在水平面上。柱面上放置了一根线密度为 λ 的光滑均匀铁链，其一端固定在柱面顶端，另一端恰好与水平面相切。求铁链在柱面顶端的这一段所受到的拉力。

分析与解：显然元功法，非常简单。

假设柱面顶端受到拉力为 T ，则假设顶端处拉力往受力方向拉一小段位移 dx ，则 T 做的元功的效果等价于将底端的长度为 dx 的小段铁链移至顶端处，因此由功能转换关系：

$$Tdx = \lambda dx \cdot gR$$

即解得：

$$T = \lambda gR$$

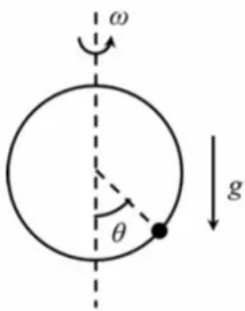
3.4、平衡的稳定性

判断平衡稳定与否，可以用受力法或者势能函数法进行判断。

(1) 受力法：首先对于处在平衡状态的物体，在平衡位置处满足合外力（力矩）为零。为判断是否为稳定平衡，可以给物体在平衡位置附近一个微小的扰动：1) 若物体所受合外力（力矩）为回复力（力矩），即有把物体拉回到原平衡位置的倾向，那么定义为稳定平衡；2) 若物体所受合外力（力矩）为排斥力（力矩），即有把物体推离原平衡位置的倾向，那么定义为不稳定平衡；3) 若物体所受合外力（力矩）为零，定义随遇平衡，随遇平衡在研究问题中意义不大。

(2) 势能函数法：首先对于处在平衡状态的物体，在平衡位置 x_0 处满足： $V(x_0)' = 0$ 。为判断是否为稳定平衡，可以利用势能函数在平衡位置 x_0 处的二阶导数来进行判断：1) 若 $V(x_0)'' > 0$ ，则为稳定平衡；2) 若 $V(x_0)'' < 0$ ，则为不稳定平衡。

例 9、(2021 清华强基) 一光滑圆环以过圆心的固定竖直轴匀速旋转，角速度为 ω 。一珠子可在圆环上自由滑动，质量为 m ，半径为 r ，如图所示。试求出图示珠子的可能处于稳定平衡的位置，用角度 θ 表示。



分析与解：小球势能分为两个，重力势能与惯性离心力势能：

$$E_p(\theta) = -mgr \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

对势能函数求一阶导数：

$$\begin{aligned} E_p'(\theta) &= mgr \sin \theta - m\omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \\ &= mr \sin \theta (g - \omega^2 r \cos \theta) \end{aligned}$$

于是平衡位置有：

$$\theta = 0, \pi, \arccos \frac{g}{\omega^2 r}$$

求二阶导算是否稳定：

$$E_p''(\theta) = mgr \cos \theta - m\omega^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

由此判断得，可能处于稳定平衡的位置为：

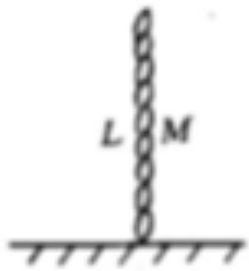
$$\theta = 0, \arccos \frac{g}{\omega^2 r}$$

4、动量

4.1、连续体问题

利用微元法，考虑 dt 时间内连续体由于碰撞而变化的动量 \vec{dp} ，结合 $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ 求出碰撞产生的冲击力。

例 10、如图所示，质量 M 的匀质细软绳，下端恰好与水平地面接触，上端用手提住，使绳处于静止伸直状态。而后松手，绳自由落下，试求绳落下 $x < L$ 长度段的时刻地面所受正压力大小 N



分析与解：这题要注意的是，绳子上端是自由落体运动，剩下就是简单的连续体问题：

$$\frac{M}{L} \cdot v \Delta t \cdot v = F \Delta t$$

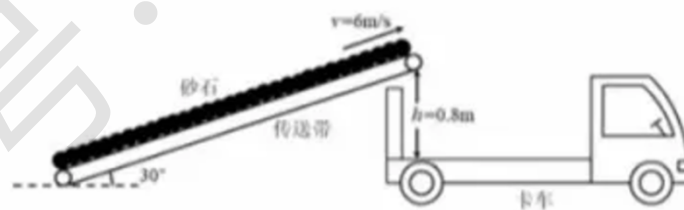
即冲击力 F 满足：

$$F = \frac{M}{L} \cdot v^2$$

再加上已经落到地面上的绳段的重力，可得：

$$N = \frac{M}{L} \cdot v^2 + \frac{x}{L} Mg = 3Mg \cdot \frac{x}{L}$$

例 11、(2021 清华强基改编) 如图，砂石以 $v = 6m/s$ 的速度沿 30° 倾角的斜面传送带匀速抛出，最终落入卡车内（下落后不反弹）， $h = 0.8m$ ，砂石在传送带上时的质量为 $\lambda = 50kg/m$ ，称量台在卡车下方，所称得的重量不计入卡车自重，则从砂石恰好铺满传送带开始计时，在传送带开始运行 $t = 2s$ 后 (BF)



- A、称量台称得重量为 $360kg$
- B、称量台称得重量为 $510kg$
- C、称量台称得重量为 $700kg$
- D、卡车所受静摩擦力为 $1000N$
- E、卡车所受静摩擦力为 $1280N$
- F、卡车所受静摩擦力为 $1560N$

分析与解：连续体问题，直接微元法分析冲量。先考虑静摩擦力，静摩擦力是由 Δt 时间内落到卡车上的砂石的水平方向速度冲击导致的：

$$f\Delta t = \lambda v\Delta t \cdot v \cos 30^\circ$$

即：

$$f = \lambda v^2 \cos 30^\circ = 1560N$$

称量台称得的重量分为两部分，一部分是已经落到卡车内的砂石重量，还有一部分是冲击力导致。分析抛体运动，不难得出砂石在空中运动时间 $t = 0.8s$ 。因此有 $1.2s$ 的砂石已经落到卡车，这部分重量：

$$m_1 = 1.2\lambda v = 360kg$$

竖直方向冲击力设为 N ，则满足：

$$N\Delta t = \lambda v\Delta t \cdot v_y$$

其中 v_y 是砂石即将碰撞到卡车时的竖直方向速度，由运动学方程可解得为 $v_y = 5m/s$ ，于是：

$$N = \lambda v \cdot v_y = 1500N$$

即称重台称得质量：

$$m = 360 + 150 = 510kg$$

4.2、杆（绳）连接物系瞬时冲击问题

首先由于是杆（绳）连接物系，因此可以列出沿杆（绳）方向速度关联方程。其次，可以设出杆（绳）在冲击瞬间产生的冲量，沿着杆（绳）方向列出动量定理。最后，要充分利用体系的对称性，减少变量个数从而简化计算过程。

例 12、（2020 清华强基）如图所示，质量均为 m 的三个质点 A、B、C 位于光滑水平面上，用已拉直的不可伸长的轻绳 AB 和 BC 连接，它们之间的夹角为 120° 。一冲量 I 沿 BC 作用于质点 C 上，则质点 A 开始运动时速度为？



分析与解：设 BC 绳的冲量为 I_1 ，AB 绳的冲量为 I_2 。对 C 分析：

$$I - I_1 = mv_c$$

对 A 分析：

$$I_2 = mv_A$$

对 B 分别沿 BC 方向和 AB 方向列冲量方程以及速度关联方程：

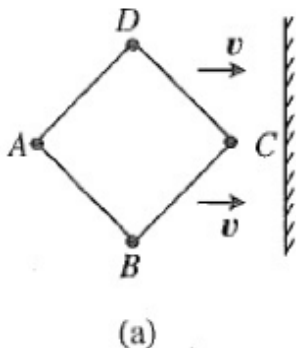
$$I_1 - \frac{1}{2}I_2 = mv_c$$

$$\frac{1}{2}I_1 - I_2 = mv_A$$

联立即可解得：

$$v_A = \frac{2I}{15m}$$

例 13、四个质量相同的小球 A、B、C、D 用相同长度的轻质刚性细杆光滑地铰接成一个菱形，开始时菱形取成正方形，在光滑的水平面上沿着对角线 AC 方向以速度作匀速运动。如图 (a) 所示，在 AC 的前方有一与方向垂直的黏性固体直壁，C 球与其相碰后立即停止运动。试求碰后一瞬间 A 球速度。



分析与解：由上下对称性以及几何对称性可知，碰后 D 水平方向分速度就等于 A 速度的一半。

设 AD 杆的冲量为 I_2 ，则对 A 分析有：

$$\sqrt{2}I_2 = m(v - v_A)$$

由于碰撞后 C 静止，则 D 沿着 CD 杆方向的分速度为 0，D 仅有沿着 AD 方向的速度，再由碰后 D 水平方向分速度就等于 A 速度的一半：

$$v_D = \sqrt{2} \cdot \frac{v_A}{2}$$

因此对 D 分析，有：

$$I_2 = m(v_D - \frac{\sqrt{2}v}{2})$$

联立即可解得：

$$v_A = v$$

说明：也可以不列公式直接观察看出，AD 杆对球 A 和 D 的冲量方向必然相反，而球 A 和 D 沿着 AD 杆方向的速度改变量也只能由 AD 杆对球 A 和 D 的冲量产生。因此由杆的速度关联，得知 A 和 D 沿着 AD 杆方向的速度改变量必须一致，而若 AD 杆对球 A 和 D 的冲量存在，则速度改变量必须相反。依此分析，AD 杆的冲量必定为零。

4.3、变质量物体的运动方程

变质量物体运动指的是物体在运动过程中主体质量不断变化的一种运动。考虑一个体系，其某一时刻的质量为 m 、速度为 \vec{v} 。利用微元法，假设在 dt 时间内有质量为 dm 、原速度为 \vec{u} 的物体并入体系，体系此时所受外力为 \vec{F} ，动量定理给出：

$$\vec{F}dt = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - (m\vec{v} + dm \cdot \vec{u})$$

化简上面的动量定理，略去高阶小量，得到：

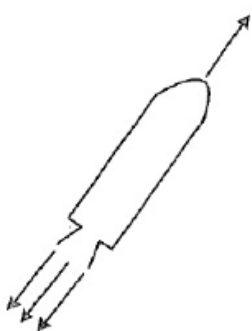
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt} + \vec{F}$$

此式称为变质量物体的基本运动微分方程（或称为密舍尔斯基方程）。有些时候题目会在初始条件中给出即将并入物体相对体系的相对速度 $\vec{v}_r = \vec{u} - \vec{v}$ ，而并非直接给定 \vec{u} ，那么这个基本运动微分方程式将有所变化：

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_r \cdot \frac{dm}{dt} + \vec{F}$$

因此在理解这个物理概念的时候，切忌去死记硬背，而是去理解微元过程下动量定理是如何列出来的，后续的方程随之推导即可得到。并且要注意以后自行推导的时候，无论题中主体质量增加或减小，我们都可以假设主体质量增加 dm ，最后推导得到的方程对于主体质量减少的情况也同样适用。

例 14、如图所示，近代火箭是利用把燃料燃烧后的废气逐渐向外喷出的办法来增加火箭自身的运动速度。设喷出气的相对速度沿运动物体轨道切向，且一个常量 v_r ；火箭在运行中不受任何外力作用；火箭起始质量为 m_0 ，其中燃料质量为 m' ，空火箭质量为 m_s （即 $m_0 - m'$ ）；火箭单位时间内喷出废气的质量为常量 h 。求火箭能够达到的速度。



分析与解：在解变质量物体的运动时，一定不要背公式，因为不同题型设置的物理量不同，因此直接列微元过程的动量守恒方程即可。

设某时刻火箭的质量为 m ，速度为 v ，则对始末状态有：

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - v_r)$$

略去高阶小量便可以得到微分方程：

$$mdv + v_r dm = 0$$

分离变量：

$$\frac{dm}{m} = -\frac{1}{v_r} dv$$

积分即得：

$$v = v_r \ln \frac{m_0}{m}$$

因此火箭能够达到的最大速度：

$$v = v_r \ln \frac{m_0}{m_s}$$

5、能量

5.1、保守力与保守势能

(1) 保守力：定义为做功与路径无关而只与初末位置有关的力，如重力、电场力、弹簧弹力都是保守力。但诸如摩擦力一类的力，其做功与路径有关，因而不是保守力。每一种保守力都可以定义相对应的保守势能 E_p ，由能量的转化与守恒关系可知，保守力某一过程中做功 W 满足： $W = -\Delta E_p$ 。

(2) 保守势能：保守势能是对应保守力使得系统内部得以储存的能量，只与系统内的相对位置有关。一般来说，我们可以通过对保守力的空间分布函数积分得到功，利用功能转化关系 $W = -\Delta E_p$ ，从而得到对应保守势能的表达式。但是，通过上述保守力功能转化关系的表达式，我们仅仅只能得到任意两点之间的势能差，而无法确定任何一点的绝对势能值，因此我们常常需要选取一个零势能点。零势能点的选取有一些约定俗成的习惯，比如引力势能选无穷远处为零势能点，静电场的电势能选取无穷远或接地为零势能点，弹簧的弹性势能选取原长为零势能点等。各常见保守力及其保守势能列举如下：

1) 重力及重力势能： $\vec{G} = m\vec{g}$ ， $E_p = mgh$ ，以高度 $h = 0$ 处为零势能点。

2) 弹力及弹性势能： $\vec{F}_{\text{弹}} = -k\vec{x}$ ， $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ ，以形变量 $x = 0$ 处为零势能点。

3) 万有引力及引力势能： $\vec{F}_{\text{引}} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$ ， $E_p = -\frac{GMm}{r}$ ，以距离 $r = \infty$ 处为零势能点。

4) 惯性离心力及离心势能： $\vec{F}_{\text{惯离}} = m\omega^2\vec{r}$ ， $E_p = -\frac{1}{2}m\omega^2r^2$ ，以到转轴距离 $r = 0$ 处为零势能点。

例 15、(2022 清华强基) 水杯绕其对称轴匀速旋转过程中，稳定情况下 (BC)

- A、水会由于黏滞阻力而停下
- B、水会随着水杯匀角速度旋转
- C、形成的水面形状为旋转抛物面
- D、形成的水面形状为旋转双曲面
- E、形成的水面形状为旋转半椭圆面

分析与解：利用旋转稳定后，液面为等势面列出方程，要注意此处运用惯性离心力势能的表达式。

$$E_p = -\frac{1}{2}m\omega^2r^2 + mgy = \text{Const}$$

显然，为抛物面方程。

5.2、质心与质心系

(1) 质心：系统的质量中心，是空间中的一个几何点。假设质点系统中各质点的质量分别为 m_i ，位矢为 \vec{r}_i ，则质心的位矢定义为用各质点质量对其对应位矢进行加权平均的结果：

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

如果质点系是连续体，则质心的定义转换为积分计算表达式：

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

由质心位矢表达式的线性关系可知，如果系统有两部分，总质量和质心位矢分别为 m_1 、 \vec{r}_{C1} 与 m_2 、 \vec{r}_{C2} ，则合并系统的质心位矢为：

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_{C1} + m_2 \vec{r}_{C2}}{m_1 + m_2}$$

(2) 质心系：相对质心静止，且一般以质心为坐标原点的平动参考系。需要注意的是，因为质心运动有些情况会存在加速度，所以质心系有可能是非惯性系。在后面我们会学习到，质心系对求解物体的动能定理、角动量定理以及刚体上任意点的速度、刚体的动能、刚体的角动量都有非常关键的作用。

例 16、求质量分布函数分别为 $\lambda = kx$ 以及 $\lambda = kx^2$ 的长度为 l 的细杆的质心位置。

分析与解：直接积分即可。

对 $\lambda = kx$ 情形：

$$x_C = \frac{\int_0^l kx \cdot dx \cdot x}{\int_0^l kx \cdot dx} = \frac{2}{3}l$$

对 $\lambda = kx^2$ 情形：

$$x_C = \frac{\int_0^l kx^2 \cdot dx \cdot x}{\int_0^l kx^2 \cdot dx} = \frac{3}{4}l$$

5.3、质心系相关的定理

(1) 质心运动定理：系统所受合外力等于系统总质量乘以质心加速度。即：

$$\vec{F}_{\text{外}} = m_{\text{总}} \vec{a}_C$$

这其实和我们高中学过的牛顿第二定律的整体法一致。

(2) 质心系的动能定理：质心系可能是一个非惯性系，在质心系中列写系统动能定理时需要考虑内力、外力与惯性力做功。但是在质心系中分析，系统受到的惯性力所做的总功为零，即系统的动能定理为：

$$W_{\text{内}} + W_{\text{外}} = \Delta E_k$$

但是质心系中对单个物体分析，仍需要考虑惯性力做功。

(3) 柯尼希定理：系统的总动能等于质心整体的动能加上系统在质心系中的相对动能。即：

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_{\text{总}} v_c^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = E_{kC} + E'_k$$

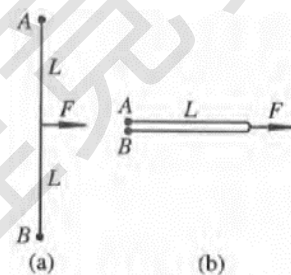
例 17、如图 (a) 所示，光滑的水平桌面上，一轻绳两端系着两个小球，质量均为 m ，一水平恒力 F 向右拉绳的中心，当 A、B 球达如图 (b) 所示状态时，求 A、B 在垂直于绳的方向上的速度

分析与解：直接在质心系中研究，无需考虑惯性力做功， F 做功距离为 L ，两个小球朝向对方运动。

$$FL = \frac{1}{2} m v_r^2 \times 2$$

因此解得：

$$v_r = \sqrt{\frac{FL}{m}}$$



5.4、碰撞与恢复系数

(1) 碰撞：在碰撞问题中，往往假定碰撞作用时间 dt 极短。以发生碰撞的两个物体为系统整体，碰撞过程内力（冲击力）极大，其他有限外力的冲量可以忽略不计。

(2) 恢复系数：对一般物体的碰撞，动量守恒成立，但是能量守恒不成立，取而代之的是以下关系：

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = \frac{v_{\text{分离}}}{v_{\text{接近}}}$$

即碰后相对分离速度与碰前相对接近速度之比为常数，称为恢复系数 e ，其只和物体的材料种类有关。

完全弹性碰撞对应 $e = 1$ ，完全非弹性碰撞对应 $e = 0$

(3) 斜碰：当碰前两物体的相对速度不沿两物体连线时（即碰前有切向相对速度），称为斜碰。对于斜碰法向，恢复系数 e 等于法向相对分离速度与法向相对接近速度之比。对于斜碰切向，如果接触面没有摩擦，则切向速度不改变。如果接触面有摩擦因数 μ 且碰撞过程切向始终发生相对滑动，则两物体间法向的支持力 N 、切向摩擦力 f 时刻都满足摩擦力公式 $f = \mu N$ ，因此对应冲量满足关系 $I_f = \mu \cdot I_N$

例 18、质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小球，系在长为 l 的不可伸长的轻绳两端，放置在光滑水面桌面上。初始时绳是拉直的。在桌面上另有一质量为 m_3 的光滑小球，以垂直于绳的速度 u 与小球 m_1 ，对心正碰，若恢复系数为 e ，求碰后瞬时绳中的张力。如图所示。

分析与解：首先考虑 m_3 与 m_1 的碰撞，动量守恒：

$$m_3 u = m_3 v_3 + m_1 v_1$$

恢复系数方程：

$$e = \frac{v_1 - v_3}{u}$$

对 m_2 小球进行受力分析：

$$T = m_2 a_2$$

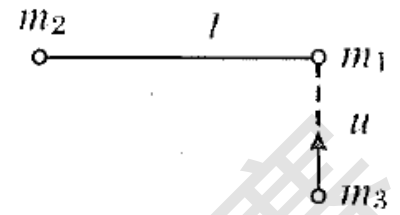
a_2 方向向右。再以 m_2 为参考系，考虑 m_1 小球，则需要附加上惯性力：

$$T + m_1 a_2 = m_1 \frac{v_1^2}{l}$$

联立上述方程即可解得：

$$v_1 = \frac{m_3 u (1 + e)}{m_1 + m_3}$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v_1^2}{l} = \frac{m_1 m_2 m_3^2 \cdot u^2 (1 + e)^2}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)^2 \cdot l}$$



6、角动量与天体运动

6.1、角动量与角动量定理

(1) 质点的角动量 \vec{L} 定义为参考点到质点的位矢 \vec{r} 叉乘质点的动量 \vec{p} ，即：

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

我们实际解题中往往只需要研究相对于某固定转轴（以z轴为例）的角动量，那么只需要将求出 \vec{L} 对转轴方向的分量 L_z 即可。若质点速度平面垂直与转轴，也可以用动量乘以动量臂的形式去计算质点相对于转轴的角动量大小。

(2) 角动量定理：在惯性系中，给定参考点，则相对此参考点的力矩等于角动量的变化率，即：

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

该结论也可以用于分量，即惯性系中对给定的轴，对轴力矩等于对轴角动量的变化率。

(3) 质点系的角动量定理：将各个质点的角动量定理相加，牛顿第三定律告诉我们作用力与反作用力大小相等，方向在同一条直线且相反，所以内力力矩之和为零。因此在惯性系中取固定参考点，质点系总角动量的变化率等于外力的合力矩。我们将在刚体部分大量使用这个结论。

$$\vec{M}_{\text{外}} = \frac{d\vec{L}_{\text{总}}}{dt}$$

(4) 质心系角动量定理：在质心系中，以质心为参考点，考虑质量为 m_i 、矢径为 \vec{r}_i' 的质点，由质心的定义可知：

$$\sum_i m_i \vec{r}_i' = m_{\text{总}} \vec{r}_c' = 0$$

这是因为质心本身在质心系中始终位于原点的位置， $\vec{r}_c' = 0$ 。考虑各质点受到惯性力力矩之和：

$$\vec{M}_{\text{惯}} = \sum_i \vec{r}_i' \times (-m_i \vec{a}_c) = - \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{a}_c = 0$$

即惯性力的总力矩为零。故质心系以质心为参考点时系统的角动量定理为：

$$\vec{M}_{\text{外}} = \frac{d\vec{L}_{\text{总}}}{dt}$$

我们在刚体问题中经常选取质心系来运用转动定理，在使用过程中可以无需考虑惯性力矩的影响。

例 19、圆锥摆的辐角为 θ ，摆线长为 l ，摆球质量为 m ，取悬挂点 O 为参考点，试求摆球所受的力矩 \vec{M} 和摆球角动量 \vec{L}

分析与解：先求力矩 \vec{M} ，小球受到重力和绳子弹力，绳子弹力与矢径 \vec{r} 共线，因此不存在力矩分量，总力矩 \vec{M} 就等于重力力矩分量：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{G}$$

大小为：

$$M = mgl \sin \theta$$

方向由右手螺旋叉乘得到垂直纸面向外。

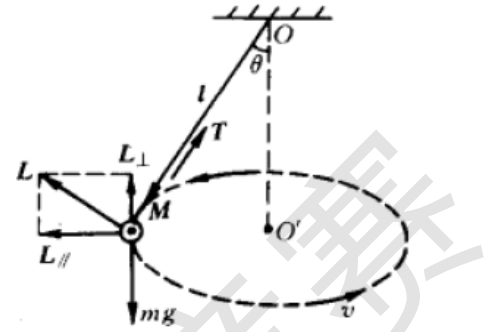
角动量为：

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

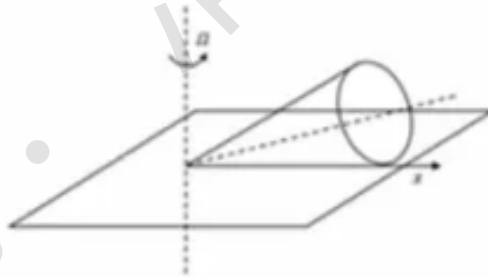
大小为：

$$L = mvl$$

方向如图垂直绳斜向左上，且位于竖直平面内。



例 20、(2021 清华强基) 重力为 G 的均匀圆锥在地面上以 Ω 匀角速度做纯滚动，当圆锥处于如图所示状态时，设圆锥与地面的接触线为动轴 x ，关于圆锥受力情况，下面选项正确的是 (AC)



- A、摩擦力平行于 x 轴
- B、摩擦力不平行于 x 轴
- C、地面支持力满足 $N_{地} = G$
- D、地面支持力 $N_{地} \neq G$

分析与解：当圆锥以稳定角速度运动时，若摩擦力有切向分量，则由角动量定理知有角加速度，因而矛盾。对整体进行分析，质心做稳定的圆周运动，因此只有水平方向的向心加速度，因此竖直方向

$$N_{地} = G$$

6.2、天体运动

(1) 开普勒第二定律与角动量守恒定律的一致性：在天体运动的问题中，由于环绕星体受中心天体的万有引力始终沿着半径方向，因此以中心天体为参考点，环绕星体受到的力矩处处为零，角动量守恒，有：

$$L = mrv_{\theta} = \text{Const}$$

开普勒第二定律（面积定律）告诉我们，环绕星体与中心天体的连线单位时间扫过的面积 $\frac{dS}{dt}$ 是一个恒定值，即：

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}rv_{\theta} = \text{Const}$$

显然这两个公式描述的变量关系都是 $rv_{\theta} = \text{Const}$ ，且有 $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$

(2) 天体运动的能量：质量为 m 、运动速度为 v 的环绕星体，中心天体质量为 M ，两者之间的距离为 r ，满足系统机械能守恒的条件，则能量可以表示为：

$$E_{\text{机}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{Const}$$

我们结合椭圆轨道的角动量守恒定律可以推导得到一个非常重要的结论，即椭圆轨道总机械能表达式：

$$E_{\text{机}} = -\frac{GMm}{2a}$$

其中 a 为椭圆轨道运动的半径， G 为引力常量。有了总机械能表达式我们便可以脱离角动量守恒方程，直接利用总机械能减去引力势能来求出环绕星体的动能与速度。

(3) 第二宇宙速度的推导原理：我们知道第二宇宙速度是物体完全脱离地球引力场所需要的最小速度，大小为 11.2km/s 。物体要想脱离地球引力场的束缚，必须能够运动到无穷远，即临界情况为运动到无穷远处速度为零，总机械能为零。设地球半径为 R 、质量为 M_e ，则物体的总机械能表达式为：

$$E_{\text{机}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GM_em}{r} = 0$$

即得到第二宇宙速度表达式：

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM_e}{r}}$$

易知第二宇宙速度为第一宇宙速度（环绕速度）的 $\sqrt{2}$ 倍。

例 21、(2020 清华强基) 质量为 $48kg$ 的飞船在距地心 $12000km$ 的轨道上做匀速圆周运动, 速度为 v_0 , 这时一质量为 $2kg$ 的太空陨石击中并镶嵌在飞船当中。已知地球半径为 $6000km$, 则能使飞船坠落到地面时最小的陨石速度为 (A)

A、 $3.59v_0$

B、 $4.35v_0$

C、 $5.51v_0$

D、 $21.8v_0$

分析与解: 最小能量对应最小速度, 由总机械能公式: $E = -\frac{GMm}{2a}$, 可知, E 最小对应 a 最小, 因此 a 最小为 $1.5R$ 。可以算得飞船碰后速度 v 满足:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{2R} = -\frac{GMm}{3R}$$

即:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{3R}} = \sqrt{\frac{gR}{3}}$$

由初始条件:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{2R}} = \sqrt{\frac{gR}{2}}$$

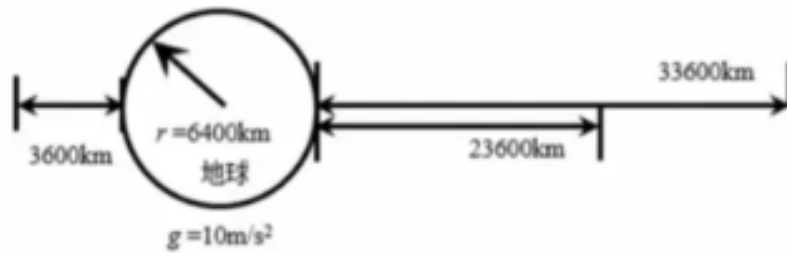
要想最小陨石速度使得飞船坠落到地面, 陨石与飞船相向运动再发生碰撞即可。记陨石质量为 Δm 、速度为 u , 结合碰撞的动量守恒方程:

$$mv_0 - \Delta mu = (m + \Delta m)v$$

联立即得:

$$u = \frac{mv_0 - (m + \Delta m)v}{\Delta m} = \frac{m - \sqrt{\frac{2}{3}}(m + \Delta m)}{\Delta m} v_0 = 3.59v_0$$

例 22、(2021 清华强基)一卫星绕地球做椭圆轨道运动,近地点距地表 3600km ,远地点距地表 23600km 。假设在近地点卫星加速,使得椭圆轨道的远地点距离地球表面 33600km ,则卫星变轨时的速度增量应为 (C) (设重力加速度 $g = 10\text{m/s}^2$)



- A、 1000m/s
- B、 500m/s
- C、 250m/s
- D、 100m/s

分析与解: 与上一题同理, 直接用总机械能表达式即可求解。

变轨前椭圆轨道的长轴长 $2a_1$ 为 40000km , 变轨后椭圆轨道的长轴长 $2a_2$ 为 50000km , 设变轨处飞船与地球的间距为 $r_0 = 10000\text{km}$ 。变轨前后卫星速度为 v_1 、 v_2 , 由总机械能公式可以得到:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{2a_1}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{2a_2}$$

即可解得:

$$v_1 = \sqrt{gR^2\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a_1}\right)}$$

$$v_2 = \sqrt{gR^2\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a_2}\right)}$$

速度增量即为:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \sqrt{gR^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a_2}} - \sqrt{\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a_1}} \right) = 257.06\text{m/s}$$

7、刚体

7.1、刚体定轴转动

刚体是一个质点组，其中任意两个质点之间的距离保持不变，生活中很多物体都是刚体，如车轮、铅笔等等。一般情形下，我们研究刚体绕一个固定轴转动的问题比较多，称为刚体的定轴转动。由于轴是固定的，定轴转动的刚体可以只用转角 ϕ 描述其运动。如图所示，以 O_z 轴为

固定轴，刚体的角速度和角加速度为：

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}, \quad \vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}$$

则刚体整体的角动量和动能可以表示为：

$$L_z = \sum_i R_i m_i (\omega R_i) = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega = I \omega$$

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega R_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

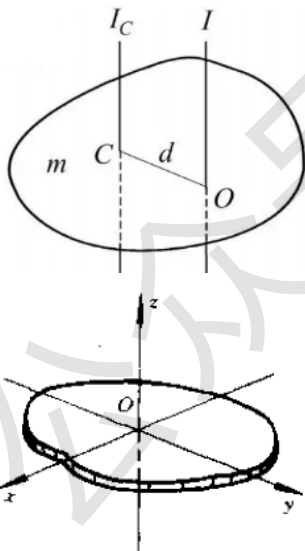
其中 R_i 是质点 m_i 到 O_z 轴的距离。

7.2、转动惯量

上面定义的 I 被称为绕 O_z 轴的转动惯量，表达式为：（前者为离散情形，后者为连续情形）

$$I = \sum_i m_i R_i^2 = \int R^2 dm$$

转动惯量 I 在转动问题中的地位非常重要，等同于平动问题中质量 m 的地位，因此在列举刚体转动的方程之前首要任务便是求出刚体的转动惯量 I 。以下是求刚体转动惯量问题中常常需要用到的概念：



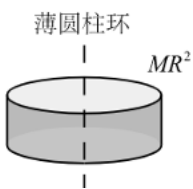
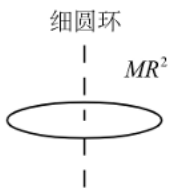
(1) 平行轴定理：过质心的轴1转动惯量为 I_C ，平行于轴1、相距为 d 的轴2转动惯量为 I ，刚体总质量为 m ，则有：

$$I = I_C + md^2$$

(2) 垂直轴定理：薄板刚体，设其平面为 xy 面， z 轴与之垂直，则相对于三轴的转动惯量满足

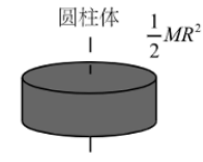
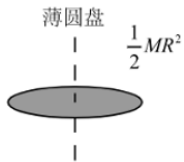
$$I_x + I_y = I_z$$

(3) 常见质量均匀几何体的转动惯量:



1) 细圆环或薄圆柱环:

$$I = MR^2$$



2) 薄圆盘或圆柱体:

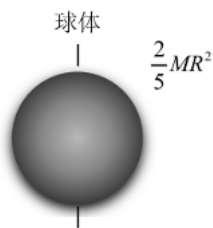
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

3) 长为 l , 质量为 M 的均匀细棒, 若以质心转轴:

$$I = \frac{1}{12}Ml^2$$

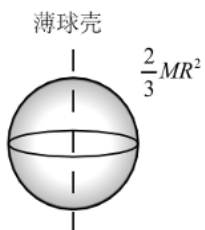
若以其中一端为转轴:

$$I = \frac{1}{3}Ml^2$$



4) 质量为 M , 半径为 R 的均匀球体, 以过球心的转轴:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$



5) 质量为 M , 半径为 R 的匀质球壳, 以过球心的转轴:

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$

7.3、刚体定轴转动的角动量定理与动能定理

(1) 使用角动量定理 $M = dL/dt$, 以及刚体定轴转动的角动量表达式 $L = I\omega$, 可以得到刚体定轴转动的角动量定理:

$$M = I\beta$$

即对轴的力矩等于转动惯量乘角加速度。

(2) 由刚体的动能表达式 $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$, 我们可以得到刚体定轴转动的动能定理:

$$W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

(3) 类比记忆: 容易发现, 刚体定轴转动的关系式与我们之前学过的质点平动方程很类似, 我们可以对物理量或者物理方程做如下类比:

转动情形	平动情形
转动惯量: I	质量: m
角度、角速度、角加速度: $\vec{\theta}$ 、 $\vec{\omega}$ 、 $\vec{\beta}$	位移、速度、加速度: \vec{x} 、 \vec{v} 、 \vec{a}
力矩: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	力: \vec{F}
角动量: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ 定轴角动量: $L = I\omega$	动量: \vec{p} 直线运动动量: $p = mv$
角动量定理: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ 定轴转动时: $M = I\beta$	动量定理: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ 直线运动时: $F = ma$
转动动能: $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$	平动动能: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

我们在记忆的时候利用此类比规律便可以由之前学的平动情形下的物理学知识很轻松地记住转动情形下的物理学方程，大大降低了学习的复杂度。

例 23、(2020 清华强基) 半径为 r 、质量为 m 的圆盘可绕垂直于自身的对称轴无摩擦旋转，初始时角速度为 ω 、半径为 R 、质量为 M 的圆盘可绕垂直于自身的对称轴无摩擦旋转，现移动转轴使得该圆盘与正在转动的圆盘边沿相接触而产生摩擦，则最终两圆盘的角速度与摩擦生热分别为？

分析与解：设切向的摩擦力为 f ，则：

$$fR\Delta t = \frac{1}{2}MR^2\Delta\omega, \quad fr\Delta t = \frac{1}{2}mr^2\Delta\omega_r$$

由此可得：

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_r} = \frac{mr}{MR}$$

最终摩擦达到稳定状态，有：

$$\omega_r \cdot r = \omega_{\text{末}} \cdot R$$

于是即可得到稳定状态 ω_r 与 $\omega_{\text{末}}$ 之间的关系：

$$\frac{\omega - \omega_{\text{末}}}{\omega_r} = \frac{mr}{MR}$$

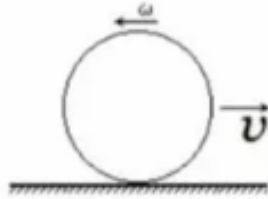
联立即可得到：

$$\omega_{\text{末}} = \frac{M\omega}{M+m}, \quad \omega_r = \frac{MR\omega}{(M+m)r}$$

摩擦生热便可以用初末能量相减得到：

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mr^2 \omega_r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \omega_{末}^2 \right) = \frac{Mm\omega^2 R^2}{4(M+m)}$$

例 24、(2020 清华强基) 粗糙地面上, 某时刻乒乓球的运动状态如图所示, 经过一段时间后, 某一瞬间乒乓球的运动情况是 (ABCD)

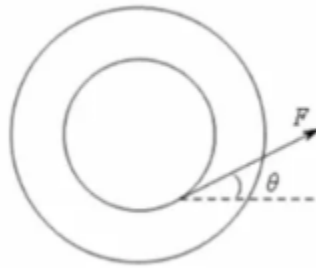


- A、可能静止
- B、可能向右无滑动滚动
- C、可能向左无滑动滚动
- D、可能向右平动不转动

分析与解: 抓住关键词, 是某一瞬间, 剩下的其实非常简单, 用质心的角动量定理和整体的牛顿第二定律稍加判断就可以了。

例 25、(2021 清华强基改编) 如图所示, 粗糙平面上有一个均匀圆柱形线轴, 线轴内外半径之比为 $r_{内}: r_{外} = 3: 4$ 。外力 F 始终沿着内径某点的切向拉动线轴, 但作用点对应的方位角 θ 可灵活变化。

下列说法正确的是 (ABD)



- A、可适当选取 F 的大小方向使线轴纯滚
- B、可适当选取 F 的大小方向使线轴静止
- C、若 $\theta = 30^\circ$, 则线轴可能静止
- D、若 $\theta = 30^\circ$, 则线轴可能纯滚

分析与解: 设线轴逆时针旋转的角加速度为 β , 线轴向左的加速度为 a , 由线轴底端受地面的摩擦力 f 向左。同样是列牛顿第二定律方程以及转动方程:

$$f - F \cos \theta = ma$$

$$Fr - fR = I\beta$$

(1) 若静止, $\beta = 0$, $a = 0$, 带入即得:

$$r = R \cos \theta$$

确实可以选取合适的角度满足此关系式。

(2) 若纯滚, 则由前述规定的 β 与 a 的正方向, 有纯滚条件:

$$a = \beta R$$

解得纯滚时需满足:

$$F = \frac{(I + mR^2)\beta}{r - R \cos \theta}$$

当 $r = R \cos \theta$ 时, 易知不能取到合适的 F 使得线轴纯滚。

因此除了 C 选项, 其余均可满足。

7.4、刚体的平面平行运动

(1) 刚体的平面平行运动指的是刚体内各点均与某一固定平面的距离保持不变的运动, 以质心系为参考系, 刚体上某点的运动可以分解为随着质心的平动和绕着质心的转动:

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

其中 \vec{v} 是该点在地面系中的绝对速度, \vec{v}_C 是刚体的质心速度, $\vec{\omega}$ 是刚体在质心系中的转动角速度, \vec{r}' 是该点相对质心的位矢。

(2) 我们之前学习的质心运动定理和质心角动量定理为:

$$\vec{F}_{\text{合外}} = m_{\text{总}} \vec{a}_C$$

$$M_{Cz} = I_{Cz} \beta$$

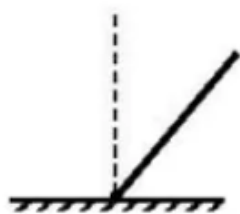
其中 $\vec{F}_{\text{合外}}$ 是刚体所受到的合外力, $m_{\text{总}}$ 是刚体的总质量, \vec{a}_C 是刚体质心的加速度。 M_{Cz} 和 I_{Cz} 分别是刚体相对质心系中过质心 C 点的瞬时固定转轴 z 的力矩和转动惯量, β 是刚体相对此轴的角加速度。

(3) 刚体动能: 根据柯尼希定理, 系统的动能等于质心动能加上相对质心的动能。

$$E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

应用此公式即可非常便捷地求出地面系中刚体运动的总动能, 方便后续求解地面系中刚体的动能定理。

例 26、(2022 清华强基) 一根质量均匀的细杆一端铰接于地面，初始时竖直方向。细杆受到微扰后在竖直平面内倒下，假设此后全过程无机械能损失，则在这个过程中，杆内部 (D)



- A、切向力最大离上端 1/3 处
- B、切向力最大离下端 1/3 处
- C、无切向力
- D、内部传递力矩最大离上端 1/3 处 (内部传递力矩的参考点默认为铰接处)
- E、内部传递力矩最大离下端 1/3 处

分析与解: 这个题目是一个典型的刚体题目, 列转动定理以及机械能守恒即可求解。设转过夹角为 θ 。

利用杆相对于一端转动惯量 $I = \frac{1}{3}ml^2$, 由机械能守恒:

$$mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} I \omega^2$$

即得:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos \theta)}{l}} = \frac{d\theta}{dt}$$

考察离下端距离 xl 处的力矩 M , 对下段杆列转动定理:

$$xmg \cdot \frac{xl}{2} \sin \theta + M = \frac{1}{3} xm \cdot (xl)^2 \frac{d\omega}{dt}$$

其中:

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{3g}{l}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \theta}} \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{3g \sin \theta}{2l}$$

解得内部传递力矩 M :

$$M = \frac{1}{2} mgl \sin \theta \cdot (x^3 - x^2)$$

利用导数法即可得到极值处为:

$$x = \frac{2}{3}$$

同理可以算出切向力 F :

$$F = \frac{M}{xl} = \frac{1}{2} mg \sin \theta \cdot (x^2 - x)$$

最大切向力在杆中点处。故选 D

例 27、(2022 清华强基) 一根质量均匀的细杆斜靠在墙上，所有表面均光滑。初始时杆与竖直墙面夹角为 30° ，在杆滑下的过程中，左侧墙对杆的作用力 (D)



- A、先增大后减小至 0
- B、先增大后减小，但不会减为 0
- C、一直增大
- D、一直减小

分析与解：设杆的质量为 m ，长度为 l 。假设某一时刻左侧墙面与杆之间的夹角为 θ ，杆质心的水平方向和竖直方向的速度分别为 v_{Cx} 、 v_{Cy} ，杆相对于质心转动角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ 。则由几何关系知：

$$v_{Cx} = \frac{d(\frac{1}{2}l \sin \theta)}{dt} = \frac{1}{2}l \cos \theta \cdot \omega, \quad v_{Cy} = -\frac{d(\frac{1}{2}l \cos \theta)}{dt} = \frac{1}{2}l \sin \theta \cdot \omega$$

利用柯尼希定理，由杆整体的动能定理可得到：

$$mg \frac{l}{2} (\cos 30^\circ - \cos \theta) = \frac{1}{2} m (v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} ml^2 \omega^2 = \frac{1}{6} ml^2 \omega^2$$

此处质心速度也可以直接由几何关系得到为 $v_{Cx} = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \frac{l}{2} \dot{\theta}$ ，因此解得：

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \theta \right)}, \quad v_{Cx} = \frac{\sqrt{3gl}}{2} \sqrt{\cos^2 \theta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \theta \right)}$$

再由质心运动定理可知左侧墙面的作用力 N 满足：

$$\begin{aligned} N = ma_{Cx} &= m \frac{\sqrt{3gl}}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \theta \right)}} \cdot 3 \sin \theta \cos \theta \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cdot \omega \\ &= \frac{9mg}{4} \cdot \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned}$$

利用求极值法求出 N 关于 θ 的导数：

$$\frac{dN}{d\theta} = \frac{9mg}{4} \left(2 \cos^2 \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \theta - 1 \right)$$

由于 $\theta \in [30^\circ, 90^\circ]$ ，解得 $\frac{dN}{d\theta} \leq 0$ 恒成立，且当 $\theta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，左侧墙面的作用力 N 减小至 0。因此

左侧墙面的作用力 N 会一直减小至 0，故选 D

8、机械振动

8.1、简谐振动

简谐振动的运动方程可以写成三角函数的形式：

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

其中， A 为振幅， ω 为圆频率， φ 为初相位， $\omega t + \varphi$ 为 t 时刻的相位，振动周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。对简谐振动的位移方程求导可以得到速度和加速度表达式：

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

其中 x 头上打一点代表 x 对时间求一次导数，这种记号在运动学中经常会用到。通过观察容易发现：

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

这就是简谐振动的微分方程，对应的解即为简谐运动的运动方程 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ ，平衡位置为：

$$x = 0$$

8.2、简谐振动的判别方式

(1) 受力法

1) 如果质点在运动中所受的合外力是一个简谐力：

$$F = -kx$$

即，合外力的大小与位移成正比，方向与位移方向相反，那么我们称这个质点的运动是简谐振动。我们假设 m 为质点质量，利用牛顿第二定律可以得到：

$$F = -kx = m\ddot{x}$$

化简得简谐振动的微分方程：

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

对应简谐振动的平衡位置为 $x = 0$ ，圆频率为 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

2) 如果质点在运动中所受的合外力形式为：

$$F = -kx + b = -k\left(x - \frac{b}{k}\right)$$

则此时质点做简谐振动的大体规律并没有变化，只是平衡位置变为 $x = \frac{b}{k}$ ，圆频率仍为 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

(2) 能量法

如果质量为 m ，速度为 v 的物体在运动过程中具有形式为 $\frac{1}{2}kx^2$ 的势能，则根据能量守恒有：

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E = \text{Const}$$

其中， E 为总能量，考虑到 $v = \dot{x}$ ，将上式对 t 求导得到：

$$kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0$$

整理得到：

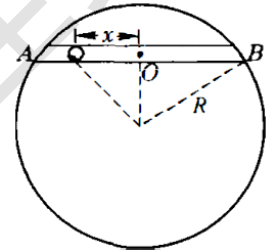
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

此即简谐振动的微分方程，所以可以得到物体做以 $x = 0$ 为平衡位置的简谐振动，圆频率为 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

例 28、如图，设想在地球表面的 A、B 两地之间开凿一直通隧道，在 A 处放置一小球，小球在地球引力的作用下从静止开始在隧道内运动，忽略一切摩擦阻力。试求小球的最大速度以及小球从 A 到 B 所需时间。已知地球半径为 R ，地球表面的重力加速度为 g ，A 和 B 之间的直线距离为 L ，地球内部质量密度设为均匀，不考虑地球自转。

分析与解：这个直接就是利用球壳对内部万有引力为 0 的结论，直接受力法即可。

设小球在图示位置距离地心为 r ，小球质量为 m ，则此时小球只受到半径为 r 的球体对其的万有引力：



$$F = \frac{GmM \cdot \frac{r^3}{R^3}}{r^2} = GMm \cdot \frac{r}{R^3}$$

万有引力沿着隧道方向的分量为：

$$F = -GMm \cdot \frac{x}{R^3} = -\frac{mg}{R}x = -kx$$

可以看出刚好为一个回复力，因此周期为：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

即小球从 A 到 B 所需时间为周期的一半：

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

最大速度为：

$$v_m = \omega A = \sqrt{\frac{g}{R}} \cdot \frac{L}{2} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

例 29、半径为 r ，质量为 m 的匀质球，可以在半径为 R 的碗内做无滑动的滚动，求匀质球在碗内做小角度振动时的周期。

分析与解：这题非常经典，一定要注意碗内的纯滚条件的变动，要理解纯滚条件的本质是小球与碗接触点瞬时速度为 0 这一特点。依然使用能量法即可。

设碗圆心与球心连线从竖直平衡位置转过的角度为 θ ，匀质球转动的角速度为 ω ，则有纯滚条件：

$$\dot{\theta}(R - r) = \omega r$$

即得：

$$\omega = \frac{R - r}{r} \dot{\theta}$$

再由柯尼希定理可知小球的动能为：

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (R - r)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m r^2 \omega^2 = \frac{7}{10} m (R - r)^2 \cdot \dot{\theta}^2$$

小球的重力势能以平衡位置为零，可以得到 θ 处的重力势能为：

$$E_p = mg(R - r)(1 - \cos \theta)$$

当 θ 很小时，利用小量近似：

$$1 - \cos \theta = 1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\theta^2}{2}$$

则有：

$$E_p = \frac{1}{2} mg(R - r) \cdot \theta^2$$

所以写出总能量：

$$E = E_k + E_p = \frac{7}{10} m (R - r)^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mg(R - r) \cdot \theta^2 = \text{Const}$$

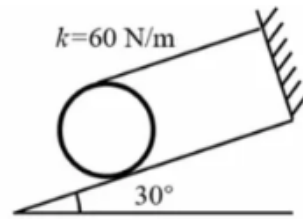
两边对时间求导并化简：

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(R - r)} \theta = 0$$

因此得到周期为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7(R - r)}{5g}}$$

例 30、(2021 清华强基) 劲度系数为 $k = 60\text{N/m}$ 的弹性绳牵着一个质量 $m = 0.2\text{kg}$ 的匀质圆柱体 (圆柱体转动惯量 $I = \frac{1}{2}mR^2$)，该柱体可以在倾角 $\theta = 30^\circ$ 的斜面上做纯滚动，在圆柱体的平衡位置附近，圆柱体受到微扰的振动周期 (A)



- A、0.222s
- B、0.555s
- C、0.689s
- D、0.314s
- E、0.444s

分析与解：以质心处在的平衡位置为原点，沿着斜面向下建立 x 轴正方向。绳子伸长速度为圆柱体上与绳子接触点的速度，而圆柱体上与绳子接触点的速度由相对速度关系：

$$v = \dot{x} + \dot{x} = 2\dot{x}$$

因此质心向下运动位移 x 对应绳子伸长 $2x$ 。那么假设质心向下运动 x ，且假设此时圆柱体与斜面之间的摩擦力沿斜面向上为 f ，我们有质心运动定律：

$$mg \sin 30^\circ - 2k(x + x_0) - f = m\ddot{x}$$

再假设圆柱体逆时针的角加速度为 β ，列出质心系的角动量定理：

$$fR - 2k(x + x_0) \cdot R = \frac{1}{2}mR^2 \cdot \beta$$

再加上纯滚条件：

$$\ddot{x} = a = \beta R$$

联立即可得到简谐振动的微分方程：

$$\ddot{x} + \frac{8k}{3m}(x + x_0) = \frac{g}{3}$$

可以看出，平衡位置就要求 $\frac{8k}{3m}x_0 = \frac{g}{3}$ ，因此：

$$\ddot{x} + \frac{8k}{3m}x = 0$$

周期：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3m}{8k}} = 0.222\text{s}$$

8.3、不完整振动

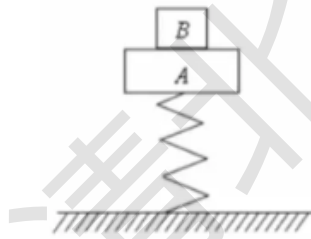
不完整振动是一种常见的振动问题，其特征不在于振动从中间某一位置开始而并非从振幅或者平衡位置开始。在求解过程中，首先我们需要确定三大特殊位置：平衡位置、原长位置、振幅位置这三个特征位置。平衡位置可以作为一个标准参考，以确定物体运动的简谐振动的位移量；原长位置可以让我们清楚地知晓物体在运动过程中每个位置受到的弹力大小；我们可以通过简谐振动的总机械能求出振幅大小，进而求出振幅位置。振幅位置则可以清晰地表示物体的运动范围。

通常，我们以平衡位置为简谐振动坐标原点，则对 x 处、运动速度为 v 、质量为 m 的物体，有：

$$E_{\text{机}} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$$

这里 A 表示简谐振动的振幅大小， v_m 表示简谐运动过程中最大速度。

例 31、(2021 清华强基)如图所示，弹簧与 A 粘连，物体 AB 之间不粘连， $m_A = 100g$ ， $m_B = 60g$ ， $g = 10m/s^2$ ， $k = 4N/m$ 。则下列说法正确的是 (CD)



- A、将弹簧由平衡位置移至比原长短20cm，则之后运动过程中 B 可脱离 A
- B、将弹簧由平衡位置移至比原长短20cm，A、B 共同运动的最大速度满足 $V_{\text{max}} \geq 120cm/s$
- C、将弹簧由平衡位置移至比原长长20cm，则之后运动过程中 B 可脱离 A
- D、将 B 从比 A 高5cm处下落与平衡态的 A 发生完全非弹性碰撞，之后的运动过程中，B 的速度能达40cm/s

分析与解：这道题我们先研究物体 AB 共同运动的情况：当物体 AB 共同运动时，其平衡位置相对原长位置缩短：

$$x_0 = \frac{(m_A + m_B)g}{k} = 40cm$$

A、B 选项研究的是“将弹簧由平衡位置移至比原长短20cm”，因此静止释放位置位于平衡位置上方20cm处，也就是说振幅为 $A = 20cm$ 。由于在振动范围内，弹簧一直属于压缩状态，若物体 AB 脱离，物体 A 的加速度不可能向下大于 g ，因此与脱离矛盾，故 A 错。运动过程中最大速度：

$$v_m = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m_A + m_B}} \cdot A = 100cm/s$$

故 B 错。C 选项将弹簧由平衡位置移至比原长长 20cm ，此时弹簧可能伸长，物体 A 的加速度可以向下大于 g ，因此与脱离符合，故 C 对。D 选项先是物体 B 自由落体，碰撞到物体 A，接着一同运动。

物体 B 自由落体有： $v_B = \sqrt{2gh} = 1\text{m/s}$ 。与 A 发生碰撞有动量守恒：

$$v_0 = \frac{m_B \cdot v_B}{m_A + m_B} = \frac{3}{8}\text{m/s}$$

它们碰撞瞬间位于的位置相对于原长缩短： $x_1 = \frac{m_A g}{k} = 25\text{cm}$ 。因而碰撞瞬间位置在物体 AB 共同运

动的平衡位置上方： $\Delta x = x_0 - x_1 = 15\text{cm}$ 。那么运动过程中最大速度满足：

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v_m^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_0^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

因此得到：

$$v_m = \sqrt{v_0^2 + \frac{k\Delta x^2}{m_A + m_B}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}\text{m/s}$$

故 D 正确。

8.4、复摆

(1) 单摆在微小幅度摆动时为简谐振动，周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ，这个可以和弹簧振子模型一样类比推出。

(2) 复摆描述的是一个刚体绕某一固定轴做摆动，为了研究其如何做简谐振动，我们利用受力法去求解：假设质量为 m 的刚体相对于质心的转动惯量为 I_c ，刚体质心到固定转动轴 O 的距离为 r_c ，那么利用平行轴定理可知刚体相对于固定转动轴 O 的转动惯量为：

$$I_o = I_c + mr_c^2$$

那么在图示位置，利用小量近似可知，刚体所受的回弹力矩为：

$$M = -mgr_c \sin \theta = -mgr_c \cdot \theta$$

因此结合固定转轴 O 的角动量定理：

$$M = I_o \ddot{\theta}$$

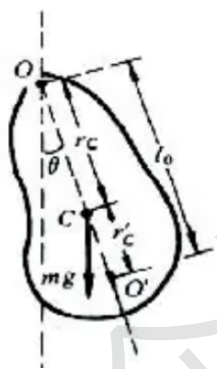
便可以得到复摆的简谐振动方程：

$$\ddot{\theta} + \frac{mgr_c}{I_c + mr_c^2} \theta = 0$$

即简谐振动的圆频率为：

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_c}{I_c + mr_c^2}}$$

这样我们便可以求解复摆的所有运动特征值以及运动方程。



9、波

9.1、行波

行波是由波源开始振动，并将振动状态不断向外传播而产生。以一维平面简谐波为例，假设行波在 t 时刻运动到 x 位置处，则沿着 x 轴正方向的行波的运动方程可以描述为：

$$y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \right] = A \cos(\omega t - kx)$$

t 时刻运动到 x 位置处的行波的振动状态是由 $(t - \frac{x}{v})$ 时刻， $x = 0$ 处的波源振动状态传播而来。 k 被定义为波数，大小为：

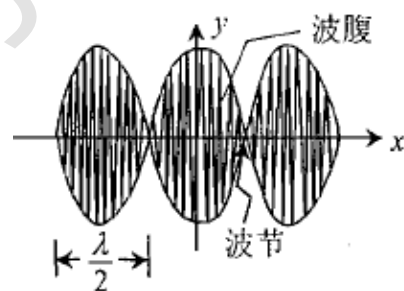
$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{v \cdot T} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

同理可知沿着 x 轴负方向的行波的运动方程可以描述为：

$$y = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \right] = A \cos(\omega t + kx)$$

9.2、驻波

两列反向传播的振幅相同、频率相同的波叠加时，形成驻波。驻波的特点是静止不动的波节和振幅最大的波腹相间，但波形不向任何方向移动，与波形向前传播的行波不同。设一列波沿 x 轴正方向传播，另一列波沿 x 轴负方向传播。选取共同的坐标原点和计时起点，波函数分别写为：



$$y_1 = A \cos(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A \cos(\omega t + kx)$$

在两波相遇时。各质元的合位移应为：

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos(kx) \cos(\omega t)$$

这就是驻波方程。

(1) 驻波方程由两简谐因子组成。只与位置有关的因子称为振幅因子。只与时间有关的因子，称为简谐振动因子。前者与位置 x 有关，与时间无关；后者与时间有关，与位置无关。因此，驻波波线上各质量元均以同一频率作简谐振动，但不同质元的振幅随位置 x 做周期性变化。与驻波不同，对于一组简谐行波，波线上每个质量元都以相同的振动频率、相同的振幅作简谐振动。

(2) 波腹与波节

波腹：驻波中振幅达最大值 $2A$ 的质元，波腹位置为：

$$x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

波节：驻波中振幅为零的质元，位于波节处的质元静止不动，波节位置为：

$$x = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{k} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

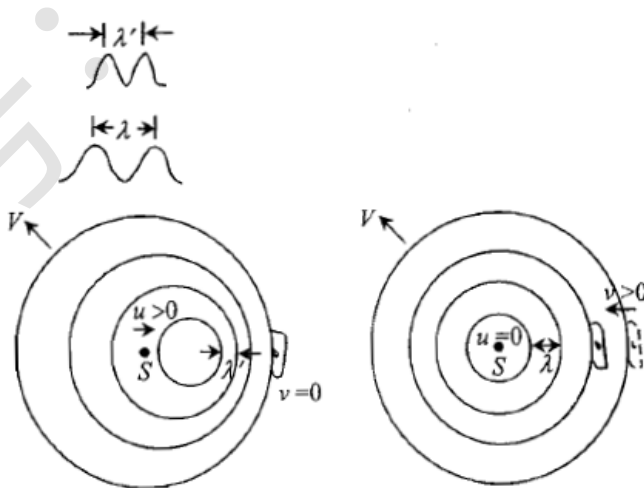
例 32、(2020 清华强基) 波长为 10m 、振幅为 1cm 、波速为 1m/s 的两列完全相同的平面简谐波在 P 点相遇，已知 P 到第一个波源 S_1 的距离为 15m 。P 到第二个波源 S_2 的距离为 35m 。则 P 作简谐振动的振幅和周期为 (D)

- A、 1cm 、 10s
- B、 2cm 、 5s
- C、 0 、 0
- D、 2cm 、 10s

分析与解：由于两列波完全相同，且相交点 P 点与波源 S_1 和 S_2 之间的距离差为 20m ，是波长 10m 的整数倍，因此在 P 点波峰遇波峰，相干增强。所以振幅变为 2cm ，周期仍为之前波的周期 $T = \frac{\lambda}{v} = 10\text{s}$ 。

9.3、多普勒效应

多普勒效应指的是由于波源或观察者相对介质运动而导致观察者所接收频率改变的现象。设波源、观察者以及它们的运动方向在同一直线上，并设观察者相对介质速度记为 v ，指向波源为正；波源相对于介质的速度记为 u ，指向观察者为正；介质中的波速为 V （在各向同性介质中， V 为恒量）。



$$f' = \frac{V + v}{V - u} f$$

其中 f' 为波源或观察者相对介质运动而导致观察者所接收的频率， f 为波源在静止时发射波的频率。且若观察者或波源运动速度不沿着两者连线方向，则将两者速度沿连线方向投影分量带入表达式即可。

例 33、飞机在空中以速度 $v = 200\text{m/s}$ 水平飞行，发出频率为 f_0 的声波。当飞机越过静止在地面上观察者的正上方时，观察者在 4s 内测出的频率从 $f_1 = 2400\text{Hz}$ 降为 $f_2 = 1600\text{Hz}$ 。已知声波在空气中速度为 $V = 330\text{m/s}$ 。试求飞机的飞行高度。

分析与解：由多普勒效应公式可知：

$$f_1 = \frac{V}{V - v \cos \theta_1} f_0$$

其中 f_0 是飞机不动时自身发出的声波频率。当飞机恰好在观察者头顶时，此刻观察者接收到的声波是由 Δt_1 时间之前的飞机发出，现在我们用 Δt_1 来表示 $\cos \theta_1$ 。于是可得：

$$\cos \theta_1 = \frac{v \Delta t_1}{V \Delta t_1} = \frac{v}{V}$$

联立即得：

$$f_0 = f_1 \frac{V^2}{V^2 - v^2} = 1518.46\text{Hz}$$

可以看出 $f_2 > f_0$ ，因此人在 4s 后接收到的声波其实是飞机在观察者头顶左侧距离 $v \Delta t_2$ 发出的，因此有关系：

$$\sqrt{h^2 + (v \Delta t_2)^2} = V(4 + \Delta t_2)$$

再由几何关系，结合多普勒效应公式：

$$\cos \theta_2 = \frac{v \Delta t_2}{V(4 + \Delta t_2)}$$
$$f_2 = \frac{V}{V - v \cos \theta_2} f_0$$

联立即解得：

$$\cos \theta_2 = \frac{V}{v} \cdot \frac{f_2 - f_0}{f_2} = 0.084$$
$$\Delta t_2 = \frac{4V \cos \theta}{v - V \cos \theta} = 0.644\text{s}$$

最后带入到上方关于 h 的几何关系式中，得到飞机的飞行高度：

$$h = \sqrt{V^2(4 + \Delta t_2)^2 - (v \Delta t_2)^2} = 1527.10\text{m}$$

二、电学篇

1、静电场

1.1、电通量与高斯定理

(1) 电通量定义为穿过某一截面的电场线条数，即：

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

其中 \vec{E} 为面元所处位置的电场强度， $d\vec{S}$ 的大小用来表述面元的面积大小，方向沿着面元的法线方向。电通量的点乘形式即代表只有垂直穿过面元的电场线才会导致有电通量。

(2) 高斯定理：静电场中穿过任一闭合曲面的电通量等于曲面内总（净）电荷量除以 ϵ_0 ，与面外电荷分布无关，即：

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

其中两个积分号指的是对二维面元进行积分，中间再画一个圈指的是闭合曲面积分。要注意的是高斯定理等式右边 q_i 需要根据正负电荷的种类而带入正负号。

例 1、利用高斯定理求无限长均匀带电直导线在距离为 r 处产生的电场强度，导线带电线密度为 λ

分析与解：取一个以长直导线为轴，半径为 r 、高为 h 的圆柱面，则由库仑定律以及镜面对称性可知空间中的电场都是以导线为轴辐射状径向向外的。再由空间的平移对称性以及旋转对称性可知，圆柱侧面的 \vec{E} 与 $d\vec{S}$ 处处垂直且圆柱侧面上的电场强度大小处处相等。而圆柱上下表面处 \vec{E} 与 $d\vec{S}$ 始终平行。因此有高斯定理：

$$\Phi = \Phi_{\text{侧}} + \Phi_{\text{底}} = 2\pi r h \cdot E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

直接得到：

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

\vec{E} 方向以导线为轴辐射状径向向外。

例 2、求电荷面密度为 σ 无穷大平面在距离平面为 r 处产生的电场强度。

分析与解：与前一题同理，取一个侧面与无穷大平面垂直、上下底面与平面距离相等、且上下底面面积为 S 的圆柱面，首先由旋转对称性知无穷大平面上方空间的电场竖直向上，下方空间电场竖直向下。由平移对称性知，上下底面的电场大小一致，均与底面垂直，而电场与圆柱侧面处处平行，因而有高斯定理：

$$\Phi = \Phi_{\text{侧}} + \Phi_{\text{底}} = 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

于是得：

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

\vec{E} 方向在无穷大平面上方空间的电场竖直向上，下方空间电场竖直向下，且从表达式可以看出上下空间均为匀强电场。

例 3、(2020 清华强基) 空间有一个半径为 R 、带电量为 Q 的导体球壳，壳外充满着带电物质，如果使壳外各处的场强的大小均相等，则距球心 r 处带电物质的电荷体密度 ρ 应为 (B)

A、 $\rho = \frac{Q}{4\pi R^2 r}$

B、 $\rho = \frac{Q}{2\pi R^2 r}$

C、 $\rho = \frac{Q}{\pi R^2 r}$

D、以上都不对

分析与解：利用高斯定理，分析半径为 r ($r > R$) 和半径为 $r + dr$ 的高斯面，假设半径为 r 的高斯面内的总电荷量为 q ，设壳外各处场强大小均为 E ，则有高斯定理：

$$\begin{aligned} E \cdot 4\pi r^2 &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\ E \cdot 4\pi (r + dr)^2 &= \frac{q + dq}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

这里 dq 指的位于半径为 r 和半径为 $r + dr$ 之间的球壳层所包含的电荷量，满足关系：

$$dq = 4\pi r^2 dr \cdot \rho$$

联立上式即可解得：

$$\rho = \frac{2\varepsilon_0 E}{r}$$

再利用半径为 R 处的电场强度也为 E ，故有：

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

即得：

$$\rho = \frac{Q}{2\pi R^2 r}$$

故选 B

1.2、电势与电势能

(1) 首先是带电量为 q 的点电荷在距离为 r 处产生的电势公式：

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

均匀带电球体或球壳，在其球外空间中产生的电势与点电荷产生的电势形式一致。对于半径为 R 、带电量为 q 的均匀带电球壳，由于球壳内部无电场，因此球壳为一个等势体，因而得到均匀带电球壳电势表达式：

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (r > R)$$

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (r \leq R)$$

对于半径为 R 、带电量为 q 的均匀带电球体，由于球体内部半径为 r 处电场只由内部分半径为 r 的带电球体产生，而半径 r 到 R 的球壳对该点不产生电场，因而得到球体内部电场强度表达式：

$$E = \frac{q \frac{r^3}{R^3}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

积分便可以得到均匀带电球体电势表达式：

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (r > R)$$
$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \int_r^R \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr = \frac{q \cdot (3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}, \quad (r \leq R)$$

(2) 对于带电量为 q 的点电荷在电场中的电势能，我们求出点电荷所处位置的电势 U ，则点电荷电势能可以表达为：

$$E_p = qU$$

但对考察带电粒子体系整体的电势能我们需要特别注意，带电粒子体系具有的电势能可以表述为：

$$E_{p\text{总}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i U_i$$

其中 q_i 为体系中第 i 个点电荷的带电量， U_i 为空间中除去点电荷 q_i ，其余所有电荷在 q_i 位置处产生的电势。式中 $\frac{1}{2}$ 系数其实是代表一个求平均的过程，例如我们考虑两个相距为 r 的点电荷 q_1 和 q_2 ，如果单独求其中任意一个点电荷的电势能，我们都可以得到 $E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ 。但是这个电势能指的其实不仅仅是某个电荷单独具有的电势能，而是该点电荷在另一个点电荷产生的电场作用下所具有的电势能。因此点电荷的电势能其实描述的还是电荷系统共同具有的电势能，这里我们利用带电粒子体系的电势能公式依然可以求得 $E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ ，与直接写出的点电荷电势能公式等价。

例 4、(2021 清华强基) 均匀带电的球体电荷量为 Q ，半径为 R ，则带电球体整体的静电势能 E_p 为？

分析与解：利用带电粒子体系具有的电势能公式：

$$E_{p\text{总}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i U_i$$

结合均匀带电球体电势表达式：

$$U = \frac{Q \cdot (3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}, \quad (r \leq R)$$

取 r 到 $r + dr$ 处的薄球壳层，他们的电势一致，于是有：

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \int_0^R 4\pi r^2 dr \cdot \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{Q \cdot (3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} = \int_0^R \frac{3Q^2 r^2 (3R^2 - r^2)}{16\pi\epsilon_0 R^6} dr = \frac{3Q^2}{16\pi\epsilon_0 R^6} \left(3R^2 \cdot \frac{1}{3} R^3 - \frac{1}{5} R^5 \right) \\ &= \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 \cdot R} \end{aligned}$$

1.3、静电平衡

(1) 静电平衡是指导体中的电荷处于稳定状态。

(2) 导体处于静电平衡时，满足以下几条法则：1) 静电平衡时导体内部电场强度处处为 0，且导体内部无电荷，导体电荷只能存在于导体表面。这是因为导体内部有许多自由电荷，若静电平衡时导体内部有电场，则自由电荷会在电场的作用下定向移动形成电流，与静电平衡相违背，因此静电平衡时导体内部电场强度处处为 0。再由高斯定理可知，在导体内部任意点附近处做一个非常小的高斯球面，由于导体内部电场强度处处为 0，则这个小高斯球面的电通量必为零，这个小高斯球面内的电荷为零。由于这个小高斯球面是任意取的，因此得证导体内部无电荷，导体电荷只能存在于导体表面。2) 静电平衡时导体为等势体，且导体表面电场线处处与导体表面垂直。若导体不为等势体，那么导体表面必存在电势不同的两点，那么自由电荷（带负电）必然会从电势低的地方定向地流向电势高的地方，与静电平衡相违背，因此静电平衡时导体为等势体。若导体表面电场线在某处与导体表面不垂直，那么该点电场必然有沿着导体表面的分量，从而在导体表面形成电势差，这与导体为等势体矛盾，因此导体表面电场线处处与导体表面垂直。3) 静电平衡时，空腔导体如果内部无自由电荷，则空腔内壁无电荷。在空腔导体内部取一个完整包含空腔的高斯面，由于高斯面位于导体内部，所以电通量恒为零，高斯面内包含的总电荷量恒为零。因此静电平衡时空腔导体如果内部无自由电荷，则空腔内壁无电荷。4) 静电平衡时，若空腔导体不接地时，则内部电荷会影响外部电场，而外部电场不影响内部电场分布；若空腔导体接地，则内外电场互相之间不影响。首先来证明空腔导体不接地的情况，依然在空腔导体内部取一个完整包含空腔的高斯面，高斯面内包含的总电荷量恒为零，即空腔内部电荷量与空腔导体内表面分布电荷量的总和为零。若空腔内部电荷量发生变化，空腔导体内表面分布电荷量随之发生改变，再由导体不接地，空腔导体内表面与外表面的电量总和不变，因此空腔导体外表面的

电荷量也会随之发生变化，进而影响到外部电场。而外部电场不影响空腔导体内部电场分布可以这样理解：同一个导体无论是否具有空腔，外电场的变化仅仅会让导体外表面的电荷分布发生移动从而使整个导体再次静电平衡，并不影响内部电场分布。而如果空腔导体接地，意味着空腔导体的外表面可以自由地与大地交换电荷，那么前述内部电荷的变化导致的空腔导体外表面电荷量的变化便可以通过与大地交换电荷而被抹去影响，外电场依然保持原来的状态而不变。

例 5、(2020 清华强基) 将一个金属导体放入匀强电场 E 当中，则导体内部一点 P 的电荷和电场情况为 (A)

- A、不带电，电场场强为0
- B、带电，电场场强为0
- C、不带电，电场场强为 E
- D、带电，电场场强为 E

分析与解：由静电平衡的特点知，不带电，电场强度为0，选 A

例 6、(2020 清华强基) 一个半径为 R 的导体球带电量为 Q ，另一个半径为 $R/2$ 的导体球带电量也为 Q ，则两者接触后的带电情况为 (B)

- A、两者带电量不变
- B、大球带电量多于小球带电量
- C、大球带电量少于小球带电量
- D、无法判断

分析与解：这道题近似地分析一下即可。半径为 R 的导体球带电量为 Q 对自己产生的电势等于导体球球心电势：

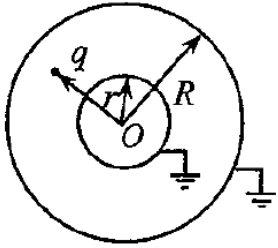
$$U_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

另一个半径为 $R/2$ 的导体球带电量也为 Q 对自己产生的电势也等于导体球球心电势：

$$U_2 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

因此 $U_1 < U_2$ ，正电荷会从高电势流向低点势，因此正电荷会从小球流向大球，即最后大球带电量多于小球带电量。

例 7、(2023 年清华强基) 如图所示, 两个同心球壳半径分别为 R 与 r , 均接地。现在在两层球壳之间距球心为 l 处放置一点电荷 q , 求两球面上的感应电荷量各自为多少?



分析与解: 由于内球接地, 因此球心 O 处电势为零, 假设内球壳带电量为 Q_1 , 外球壳带电量为 Q_2 , 则有球心 O 处电势:

$$U_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r} + \frac{q}{l} + \frac{Q_2}{R} \right) = 0$$

再在外球壳导体的内部做一个高斯球面, 因为外球壳接地, 这个高斯面内的电场与外电场互不影响, 而外空间没有电场分布, 因此外球壳的外表面没有电

荷, 外球壳的所有电荷 Q_2 均分布在其内表面, 因此有高斯定理:

$$Q_1 + q + Q_2 = 0$$

联立即得:

$$Q_1 = -\frac{r}{l} \cdot \frac{R-l}{R-r} q$$

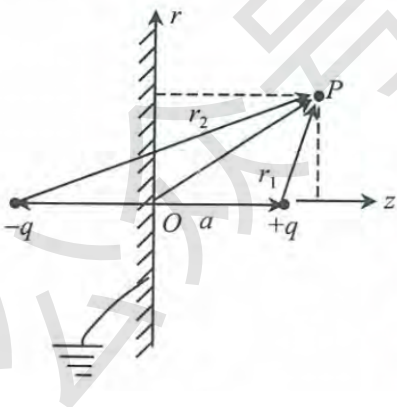
$$Q_2 = -\frac{R}{l} \cdot \frac{l-r}{R-r} q$$

1.4、电像法

(1) 静电场的唯一性定理: 在一个空间内, 导体的带电量或者电势给定以后, 空间电场分布恒定且唯一。这个定理应用在理解电像法的过程中具有一定的作用。

(2) 典型的电像法分为两类, 一类是无限大接地导体平板的电像法, 一类是带电导体球的电像法。

1) 无限大接地导体平板的电像法: 考虑一竖直放置的无限大接地导体平板, 右侧放置一带电量为 $+q$ 的点电荷, 试问空间中 P 点的电场强度和电势为多少。带着这个问题, 我们去思考一下空间中电场以



及电势的分布。由于无限大导体平板接地, 因此平板平面均为零势, 且导体板表面电场强度处处与平板垂直。这与我们熟知的一对电荷量相等的正负电荷的电场分布极其类似, 如图所示, 若将 $+q$ 的点电荷以平板为镜面对称放置一个负电荷 $-q$, 若单独只看这一对正负电

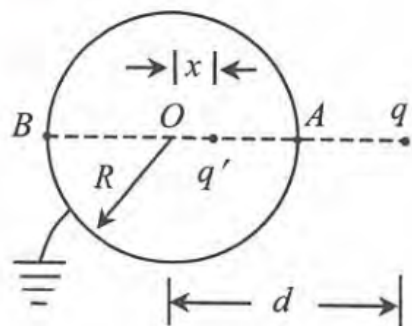
荷, 则在平板的中垂面上也会是零势以及电场强度也会处处与该中垂面垂直。因此由静电场的唯一性定理可知, 无限大接地导体平板

与 $+q$ 点电荷构成的系统与 $+q$ 点电荷与镜像对称的 $-q$ 点电荷构成的

系统在中垂面上电势、电场强度均相等, 因此可以判断两者全空间的电场强度分布一致, 可以用等效

模型去分析 P 点的电场强度和电势。

2) 带电导体球的电像法：首先考虑一接地导体球，右侧放置一带电量为 q 的点电荷，试问外空间中的电场如何分布。依据电像法的精髓，我们假设点电荷 q 与导体构成的系统也可以用点电荷 q 与点电荷 q' 构成的系统进行等效。



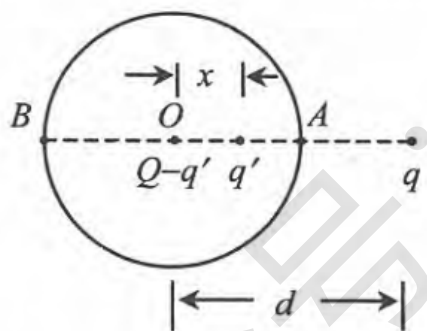
由于导体接地，我们只需要点电荷 q 与点电荷 q' 构成的等效系统在球面上产生的电势处处为零即可。那么由几何学的结论便可得到，如图所示，只需要将等效点电荷 q' 放置在点电荷 q 与球心 O 点连线上距离 O 点 x 处，等效后的系统与原系统即可完全等价。且有如下关系：

$$q' = -\frac{R}{d}q$$

$$x = \frac{R}{d}R = \frac{R^2}{d}$$

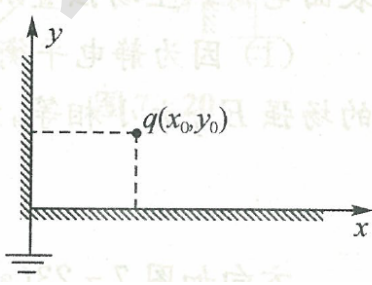
这两个公式也非常好去理解，首先 q' 与 q 的正负号肯定是相反的，因为由电荷之间的异性相吸的规律知道反向电荷会由于静电感应的作用而靠近 q 而形成等效电荷 q' 。其次要知道 q' 位于球内，即 $x < R$ ，那么由已知量凑出一个小于1的无量纲数乘以 R 便可以得到 x ，易知这个无量纲的比例系数只能是 $\frac{R}{d}$ ，同时这个比例系数还是 q'/q 的绝对值。

同理，我们还可以考虑不接地、原带电量为 Q 的导体球的电像法。首先如前所述放置等效电荷 q' 在距球心 x 处，大小和前述一致，此时会发现点电荷 q 与点电荷 q' 共同对球面上产生的电势均为零。不接地导体是一个等势体没错，但不是零势，且从电荷守恒的角度去看我们还需要在球内放置一个 $Q - q'$ 的等效点电荷才能保证等效系统与原系统的导体球电荷总量一致。



放置 $Q - q'$ 的等效点电荷还需保证对球面上任何一点产生的电势都相等，那么这个等效电荷必须放在球心处，因此等效系统如图所示：放置等效点电荷 q' 在距球心 x 处，在球心位置放置 $Q - q'$ 的等效点电荷。等效量满足的关系与前述公式一致。

例 8、如图所示，一很大的接地导体，具有两个相互垂直的表面。位于坐标 (x_0, y_0) 处有一点电荷 q ，求 q 所受到的库仑力。



分析与解：这是一个双镜面对称的题型，我们先按照单镜面对称的电像法分别在第二象限、第四象限分别对称放置电荷量为 $-q$ 的等效电荷，此时考虑 x 轴或 y 轴的电势会发现并不为零。那么我们只需要在第三象限再对称地放置一个 q 的等效电荷，即可保证两个接地导体板均为零势，自此等效电荷系统完成。接下来计算 x 与 y 方

向的分力：

$$F_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4(x_0^2 + y_0^2)} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} - \frac{1}{4x_0^2} \right]$$

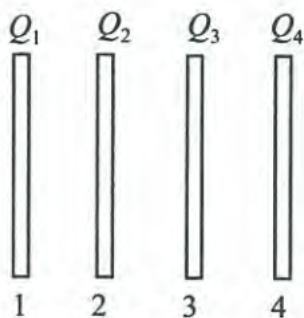
$$F_y = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4(x_0^2 + y_0^2)} \cdot \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} - \frac{1}{4y_0^2} \right]$$

由此得解。

1.5、带电平行导体板问题

(1) 带电平行导体板表面带电量问题：我们经常会遇到一类问题，即几块初始就携带不同电荷的平行板以一定的间隔平行放置，接着要求出各极板两个表面分别带电量为多少。这种问题我们该如何去理解并求解呢，这里教大家一种非常好用的方法。下面我们举例来详细分析一番：

如图所示，初始四个极板带电量分别为 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 ，求各极板平行放置后左右表面分别带电量为多少。遇到这种问题我们首先假设平衡后各极板表面带电量从左到右依此为 q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4 、 q_5 、 q_6 、 q_7 、 q_8 ，总共八个未知量。首先可以得到各极板的电荷量守恒方程：



$$q_1 + q_2 = Q_1$$

$$q_3 + q_4 = Q_2$$

$$q_5 + q_6 = Q_3$$

$$q_7 + q_8 = Q_4$$

总共有八个未知量，现在只得到四个方程，那么还缺少四个方程便可求解。接下来我们利用在平行板假设（平行板之间的间距远小于平行板的尺寸大小）下，带电平行板产生的电场都可以视作无穷大平面产生的电场强度。因此假设极板的面积均为 S ，分别对1、2、3、4导体板的内部取点，这些点总电场强度都为0得到余下四个方程：

$$\frac{q_1}{2\epsilon_0 S} = \frac{q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 + q_8}{2\epsilon_0 S}$$

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{2\epsilon_0 S} = \frac{q_4 + q_5 + q_6 + q_7 + q_8}{2\epsilon_0 S}$$

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5}{2\epsilon_0 S} = \frac{q_6 + q_7 + q_8}{2\epsilon_0 S}$$

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7}{2\epsilon_0 S} = \frac{q_8}{2\epsilon_0 S}$$

消去共同的乘数 $\frac{1}{2\epsilon_0 S}$ ，即可得到 q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4 、 q_5 、 q_6 、 q_7 、 q_8 剩下的四个关联方程。因而八个方程八个未知量，所有未知量都可以解出。

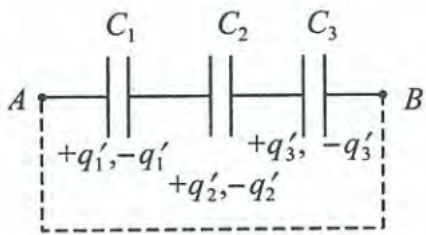
(2) 带电平行导体板表面受力问题：紧接上文，若要求出带电平行导体板某一表面电荷受到的电场力，该如何去分析与理解。例如，我们考察极板1的左侧表面电荷 q_1 受到的电场力大小。首先要知道

的是,为了求出左侧表面电荷 q_1 受到的电场力大小,就必须得求出除了自身电荷以外的其他所有电荷,在1极板左侧表面处产生的电场强度 E' ,再用 $F_1 = q_1 \cdot E'$ 得到即可。那么在上述模型中,有:

$$E' = \frac{q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 + q_8}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S}$$

将求解出的表达式代入即可得到带电平行导体板某一表面电荷受到的电场力。

例 9、如图所示,三个电容器的电容分别为 C_1 、 C_2 、 C_3 ,初始时刻分别充电至电压 V_1 、 V_2 、 V_3 。现将其连接成一个回路,求达到稳定后各电容器上带电量。



分析与解: 设各极板带电量如图所示,则由电荷守恒方程:

$$q'_1 - q'_3 = C_1 V_1 - C_3 V_3$$

$$-q'_1 + q'_2 = -C_1 V_1 + C_2 V_2$$

$$-q'_2 + q'_3 = -C_2 V_2 + C_3 V_3$$

我们会发现,其实上面两个方程加起来再加一个负号就变成了第三个方程,也就意味着三个方程中只有两个是独立的和有效的,因此我们还需要再找一个独立的方程,由于导线将 A、B 连接起来,因此有:

$$U_{AB} = \frac{q'_1}{C_1} + \frac{q'_2}{C_2} + \frac{q'_3}{C_3} = 0$$

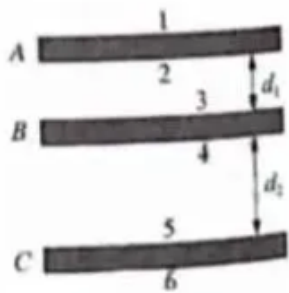
联立三个独立的方程即可解得:

$$q'_1 = C_1 V_1 - \frac{V_1 + V_2 + V_3}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

$$q'_2 = C_2 V_2 - \frac{V_1 + V_2 + V_3}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

$$q'_3 = C_3 V_3 - \frac{V_1 + V_2 + V_3}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

例 10、(2020 清华强基) 三块金属导体板 A、B、C 依次平行放置，A 板与 B 板间距为 d ，B 板与 C 板间距为 $2d$ ，现已知 B 板带电为 q ，A、C 两板为电中性且以导线相连，则图中 1-6 号面带电情况为？



分析与解：假设六个面的电荷量为 q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4 、 q_5 、 q_6 ，电荷量守恒：

$$q_1 + q_2 + q_5 + q_6 = 0$$

$$q_3 + q_4 = q$$

三个极板导体内部电场强度为零：

$$q_1 = q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = q_4 + q_5 + q_6$$

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = q_6$$

AB 与 BC 极板间的电场强度公式：

$$E_{AB} = \frac{q_1 + q_2}{2\epsilon_0 S} - \frac{q_3 + q_4 + q_5 + q_6}{2\epsilon_0 S}$$

$$E_{BC} = \frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{2\epsilon_0 S} - \frac{q_5 + q_6}{2\epsilon_0 S}$$

A 与 C 板电势差为零：

$$E_{AB} \cdot d + E_{BC} \cdot 2d = 0$$

联立得到第六个方程：

$$q_1 + q_2 - (q_3 + q_4 + q_5 + q_6) + 2[q_1 + q_2 + q_3 + q_4 - (q_5 + q_6)] = 0$$

因此可以解得：

$$q_1 = \frac{q}{2}$$

$$q_2 = -\frac{2q}{3}$$

$$q_3 = \frac{2q}{3}$$

$$q_4 = \frac{q}{3}$$

$$q_5 = -\frac{q}{3}$$

$$q_6 = \frac{q}{2}$$

例 11、(2021 清华强基) 两块面积较大的金属薄板间距 d 较小, 面积均为 S , 金属薄板分别有电荷量 Q 和 q , 则两者内侧电荷间的相互作用力为?

分析与解: 依然假设四个面带电量为 q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4 , 电荷量守恒:

$$q_1 + q_2 = Q$$

$$q_3 + q_4 = q$$

两个极板导体内部电场强度为零:

$$q_1 = q_2 + q_3 + q_4$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = q_4$$

联立解得:

$$q_1 = \frac{Q + q}{2}$$

$$q_2 = \frac{Q - q}{2}$$

$$q_3 = \frac{-Q + q}{2}$$

$$q_4 = \frac{Q + q}{2}$$

分析其中一个内侧即可, 考虑 q_2 受到的作用力, q_3 在 q_2 处产生的场强为:

$$E' = \frac{q_3}{2\epsilon_0 S}$$

因此相互作用力为:

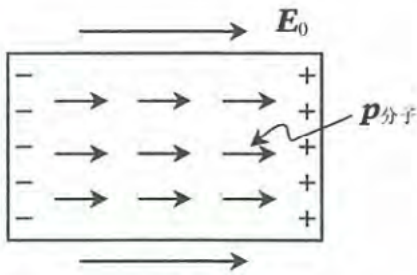
$$F = |E'q_2| = \frac{(Q - q)^2}{8\epsilon_0 S}$$

1.6、极化电荷

(1) 极化现象的微观解释: 自然界中的分子是由原子构成, 原子由带正电的原子核和带负电的核外电子组成。我们平均地考虑一个分子的正电荷等效中心和负电荷等效中心, 有以下两种情况: 每个分子的正电荷等效中心和负电荷等效中心重合, 宏观上向外不表现电性, 因而称为无极分子; 每个分子的正电荷等效中心和负电荷等效中心不重合, 宏观上向外表现电性, 因而称为有极分子。我们考虑一对带电量为 $+q$ 和 $-q$ 的正负电荷, 假设他们之间的距离为 l , 在考察空间尺度远大于正负电荷间距, 即远离此系统中心位置 $r(r \gg l)$ 处电场时, 可将这对正负电荷称为电偶极子。我们定义电偶极矩矢量为:

$$\vec{p}_e = q\vec{l}$$

其中矢量 \vec{l} 的方向为负电荷指向正电荷，大小即为正负电荷之间的间距。因此，在无外界电场的条件下，单个无极分子产生的电偶极矩为0，单个有极分子产生的电偶极矩不为0。在有外电场的情况下，



单个无极分子的等效正负电荷中心各自产生一个位移，从而产生沿电场方向的电偶极矩。此时考虑介质内部左右相邻的两个电偶极子，左边电偶极子的正电荷由于极化作用向右移动，恰好与右边电偶极子向左移动的负电荷重合。因此由于介质内部正负电荷处处重合，在介质内并不会显现出电性。只有在介质的表面上才会出现宏观的极化电荷，介质左侧表面由于电偶极子负电荷向左

移动而形成未抵消的净负电荷，同理介质右侧表面带正电，因而极化电荷在介质内形成削弱原电场的附加电场。上述这种极化方式称为无极分子的位移极化。对于有极分子，无外电场的情况下有极分子的朝向随机，因此宏观上依旧不产生电场。当有外电场作用时，所有分子电偶极矩受到力矩的作用都会共同朝着图示电偶极矩方向靠拢，因此介质内部平均来看拥有向右的电偶极矩，极化电荷的分布以及产生的附加电场与无极分子的分析一致。该种极化方式称为有极分子的取向极化。

(2) 电极化矢量与电位移矢量：电极化强度矢量定义了单位空间中产生的电偶极矩的大小，对应表达式为：

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}$$

一般情况下，我们遇到的都是各向同性的均匀介质，即在介质中 \vec{P} 处处相同。那么电极化矢量与电场强度矢量的关系为：

$$\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\vec{E}$$

其中 ϵ_r 为介质的相对介电常数， ϵ_0 为真空的介电常数， \vec{E} 为研究位置处的总电场强度（包含极化电荷和自由电荷产生的电场强度贡献）。自然界的电荷按照其分布材料的性质分为自由电荷和极化电荷。理想的导体只分布自由电荷，理想的介质只分布极化电荷，某些介于两者中间的材料可以同时分布自由电荷和极化电荷。我们刚刚已经了解，电极化矢量 \vec{P} 与极化电荷的分布有关，现引入一个新的物理量与自由电荷的分布关联起来，定义电位移矢量 \vec{D} ：

$$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

这里的 \vec{E} 依然是研究位置处的总电场强度。

(3) 电极化矢量 \vec{P} 与电位移矢量 \vec{D} 的高斯定理：首先我们要明确的是，电极化矢量 \vec{P} 是与极化电荷相关联，电位移矢量 \vec{D} 是与自由电荷相关联。他们各自也满足相应的高斯定理：

$$\oiint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -q'$$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

其中 q' 为高斯面内所有极化电荷量， q_0 为高斯面内所有自由电荷量。我们把之前学习到的关于电场强度 \vec{E} 的高斯定理也写出：

$$\oiint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{总}}$$

那么通过对比我们可以看出， \vec{P} 对高斯面积分对应的是极化电荷量的负值， \vec{D} 对高斯面积分对应的是自由电荷量， $\epsilon_0 \vec{E}$ 对高斯面积分对应的是总电荷量，因此：

$$\vec{D} - \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}$$

这一关系非常好去联想记忆。

2、稳恒电流

2.1、稳恒条件

(1) 电流强度微观解释：电流强度是表示电流强弱的物理量，记为 I ，它被定义为单位时间内通过导体任一截面的电量。在稳恒条件下，电流表达式写为：

$$I = \frac{Q}{t}$$

对于微观情况下，考虑电流垂直流过的某个截面，设截面的面积为 S ，导体中粒子的数密度为 n ，导体中粒子带电量为 q ，带电粒子定向移动速度为 v ，则经过一段时间 t 总计有流过 Q 的电荷量流过此截面，则有电流的表达式：

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{n \cdot Svt \cdot q}{t} = nqSv$$

此即稳恒电流强度的微观形式。

(2) 电流密度：在通常的电路问题中，流过导线截面的电流用电流强度描述就可以了，但在讨论大块导体中电流的流动情况时，用电流强度描述就过于粗糙了。这是因为电流在截面上将会有有一个强弱不同的分布，而且各点的电流方向可能并不一致。为了“精细”地描述导体中各点电流的大小和方向，引入电流密度，记为 \vec{j} 。电流密度是一个矢量，在导体中各点，这个矢量的方向代表该点电流的方向，其数值等于通过该点单位垂直截面的电流强度，表达式写为：

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS} \vec{n}$$

其中 \vec{n} 为所考察点电流方向的单位矢量。我们定义面元的法向为其面积矢量的方向，若考察点所取的面元法向与电流方向夹角为 θ ，则流过此面元($d\vec{S}$)的电流强度(dI)与电流密度 \vec{j} 的关系式写为：

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot dS \cos \theta$$

由此可知，电流密度和电流强度的关系就是一个矢量和它的通量的关系。通常情况下电流密度指的是电流面密度，即单位面积上垂直通过的电流大小，但有些时候也会类比地出现电流线密度等定义。

(3) 欧姆定律的微分形式：我们逐点分析电流密度 \vec{j} 和电场强度 \vec{E} 的关系，设想在载有稳恒电流的各向同性导体内沿着电流方向取一长度为 dl ，垂直截面积为 dS 的小电流管。假设电流管的电流为 dI 、两端的电压为 dU 、电阻为 R ，电流管内电场强度为 E ，导体的电阻率为 ρ ，则有关系：

$$dI = \frac{dU}{R}$$

$$dI = jdS$$

$$dU = Edl$$

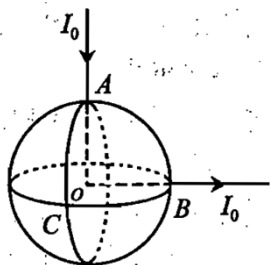
$$R = \rho \frac{dl}{dS}$$

联立即可得：

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

其中 $\sigma = \frac{1}{\rho}$ ，被称为电导率。这里已考虑到在各向同性导体中，正电荷沿着电场强度的方向运动， \vec{j} 和 \vec{E} 同向。

例 12、半径为 R 的导体球壳，球心位于 o 点，已知球面上三点 OA 、 OB 、 OC 相互垂直，现在从 A 点注入电流 I_0 ， B 点流出电流 I_0 。求 C 点处的电流密度（垂直于电流方向单位长度上流过的电流）



分析与解：设球底端为 D 点，球左端为 E 点。则从 A 进入 B 流出的电流可以等效为 A 进 D 出叠加上 E 进 B 出再叠加上 D 进 E 出。 A 进 D 出对 C 点产生的电流密度为：

$$j_1 = \frac{I_0}{2\pi R}$$

由旋转对称性可知， \vec{j}_1 方向向下。 E 进 B 出对 C 点产生的电流密度为：

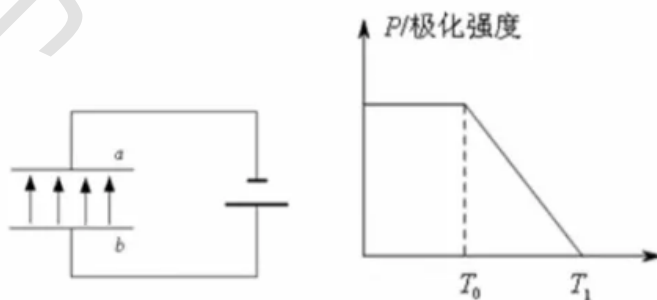
$$j_2 = \frac{I_0}{2\pi R}$$

由旋转对称性可知， \vec{j}_2 方向向右。再考虑 D 进 E 出在 C 点产生的电流密度，将 D 进 E 出的空间几何形状旋 180° 便可以得到 A 进 B 出，也就意味着 D 进 E 出在 C 点产生的电流密度和我们要求的 A 进 B 出在 C 点产生的电流密度刚好是一个反向的电流分布，因此我们由叠加的关系便可以得到：

$$j_c = \frac{1}{2} \sqrt{j_1^2 + j_2^2} = \frac{\sqrt{2}I_0}{4\pi R}$$

方向沿着右偏下 45° 角。

例 13、(2021 清华强基) 平行板电容器接在电压恒定的电源电动势两端，中间有一块均匀极化的电介质，极化强度 P 随温度 T 变化规律如图所示，电介质不是完全绝缘的，有微弱的电导率，则 (C)



- A、 $T \in (0, T_0)$ 时，回路中没有电流
- B、温度从 T_1 到 T_0 时，电容上的电荷量减少
- C、温度从 T_1 到 T_0 时，电容上的电荷量增多
- D、温度从 T_1 均匀变到 T_0 时，电容上的电荷量不变

分析与解：均匀极化介质有电极化强度矢量 \vec{P} 与电场强度 \vec{E} 满足的关系：

$$\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\vec{E}$$

再结合欧姆定律的微分形式，即电流密度 \vec{j} 与电场强度 \vec{E} 满足的关系：

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

因此对 A 选项， $T \in (0, T_0)$ 时，极化强度不为零，电场强度不为零，则电流密度不为零，所以 A 错。

对 BCD 选项，由于极板两端的电压不变，电容器间的电场强度 \vec{E} 也不变，则温度从 T_1 到 T_0 ，由于极化强度 \vec{P} 增大，意味着电介质的相对介电常数 ϵ_r 变大。因此结合电容器的电容公式：

$$C = \frac{\epsilon_0\epsilon_r S}{d}$$

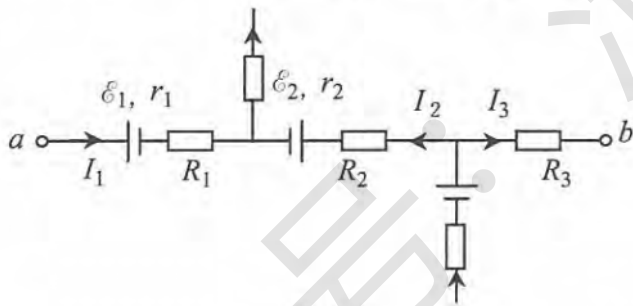
可知电容器的电容增大。再结合电容器携带电荷量与电容、电压之间的关系：

$$Q = CU$$

即由于电容器两端的电压不变，电容器上的电荷量会增多，因此 C 对，BD 错。

2.2、基尔霍夫定律

(1) 数电压法：数电压法教会我们如何在已知复杂电路中各支路电流大小与方向以及元件构造的情况下，规范地求出任意两点之间的电压。如图所示，电路中各支路电流大小与方向以及元件构造均给



定，试问如何规范求出 a 点与 b 点之间的电压 U_{ab} 。

数电压法规定一个数电压的路径方向，例如这个问题中我们要求：

$$U_{ab} = U_a - U_b$$

那么我们规定的路径方向从 a 点数到 b 点即可。同

时，数电压的过程中，我们规定每个元件沿着路径方向以电势降落为正。例如在左图中，电流 I_1 首先流经一个电动势 ϵ_1 （内阻 r_1 的电势降落情况与后面分析电阻 R_1 时一致），由电动势的正极电势高于负极电势，因此我们知道沿着规定的从左到右的路径方向，电流流过电动势 ϵ_1 电势是下降的，需要在数电压法的表达式取正号；电流 I_1 还会流过一个电阻 R_1 ，那么由顺着电流方向电势逐渐降低可知，电流流过电阻 R_1 的电势也是下降的。同理可以写出数电压法的电势降落表达式：

$$U_{ab} = U_a - U_b = I_1(R_1 + r_1) + \epsilon_1 - \epsilon_2 - I_2(R_2 + r_2) + I_3R_3$$

依此规律，在遇到其他元件的情况下只需要以电势降落为正进行数电压法即可。

(2) 基尔霍夫定律

1) 基尔霍夫第一定律（节点电流定律）表述为，对于电路中任何一个节点，流出的电流之和等于流

入的电流之和。由此我们可以写出基尔霍夫第一方程组（节点电流方程组）：

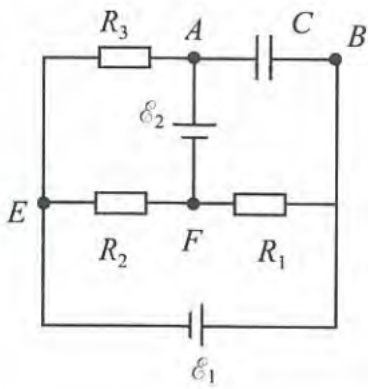
$$\sum \pm I_i = 0$$

2) 基尔霍夫第二定律（回路分压定律）表述为，绕回路一周，电势降落的代数和为零。由此我们可以写出基尔霍夫第二方程组（回路分压方程组）：

$$\sum \pm \varepsilon_i + \sum \pm I_i R_i = 0$$

这个方程便可以通过前述的数电压法内容，从某点开始沿着闭合回路数电压回到起点，整个过程电势降落为零得到。要注意的是，我们研究复杂电路的时候，电路中往往有多个节点以及多个回路，那么在列出基尔霍夫方程组的时候一定要把所有独立的方程通通列出，再对这些多未知量的多方程组作数学求解即可。

例 14、如图所示电路中， $\varepsilon_1 = 4V$ ， $\varepsilon_2 = 1V$ ， $R_1 = 10\Omega$ ， $R_2 = 20\Omega$ ， $R_3 = 30\Omega$ ，电源内阻不计。求电容C两极板间的电势差 $U_{AB} = U_A - U_B$



分析与解：电容相当于断路，假设电流 I_3 从A流向F、电流 I_2 从E流向F、电流 I_1 从F点向右流出，列出节点电流方程：

$$I_1 = I_2 + I_3$$

再取回路A到F到E到A，以及回路E到F到 R_1 到 ε_1 到E，列出回路分压方程：

$$\varepsilon_2 - I_2 R_2 + I_3 R_3 = 0$$

$$I_2 R_2 + I_1 R_1 + \varepsilon_1 = 0$$

联立即得：

$$I_1 = -0.2A$$

$$I_2 = -0.1A$$

$$I_3 = -0.1A$$

因此通过数电压法可知：

$$U_{AB} = U_A - U_B = \varepsilon_2 + I_1 R_1 = -1V$$

说明：这个电路有两个节点，但是两个节点电流方程都一样，因此我们只列一个单独的节点电流方程即可。同时，回路电压方程对最外圈的A到F到 R_1 到 ε_1 到E到A也可以列出回路分压方程，但这个方程其实可以由上面列出的两个回路分压方程加减运算而得到，因而三个回路分压方程只有两个是独立的。

3、磁场

3.1、毕奥-萨伐尔定律

(2) 毕奥-萨伐尔定律：考虑一个电流元 $I d\vec{L}$ ，其中 I 为电流元的电流强度大小， $d\vec{L}$ 的大小表示电流元的长度，方向与电流流向一致。电流元 $I d\vec{L}$ 在相对电流元的位矢为 \vec{r} 处产生的磁感应强度 $d\vec{B}$ 满足毕奥-萨伐尔定律：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{L}}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r}$$

其中， μ_0 称为真空磁导率。可以看出形式上与库仑定律比较类似：

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

只不过库仑定律是直接利用矢径的单位向量 $\frac{\vec{r}}{r}$ 作为电场强度的方向，而毕奥-萨伐尔定律用电流元的方向叉乘矢径的单位向量从而得到磁感应强度的方向。这是因为电荷元 dq 本身是一个标量，而电流元 $I d\vec{L}$ 是一个矢量，有所差别。且由对称性可知，静电场中的 $\frac{1}{\epsilon_0}$ 的地位与静磁场中的 μ_0 地位相当，在后面的讲解中也会愈发确信这个联系。

例 15、半径为 R 的圆环，环中电流大小为 I ，求过中心轴线上距离圆心 O 点距离为 x 的磁感应强度。

分析与解：由旋转对称性可知，环上每个电流元产生的垂直 x 轴方向的磁感应强度都会被抵消，只剩下沿 x 轴的分量叠加。因此有：

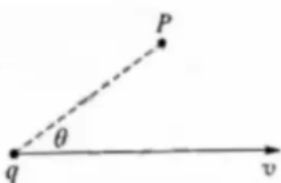
$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I dl}{R^2 + x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

从而得到总磁感应强度为：

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R}{R^2 + x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

方向沿着 x 轴。具体沿 x 轴正负方向需要题目具体给出图像位置，此处省略。

例 16、(2020 清华强基) 带电量为 q 粒子以不大的速度 v 做匀速运动，在空间产生电磁场，如图所示，场中距粒子所在位置距离 r 的点 P (图中 O 已知) 处的电场强度 E 和磁感应强度 B 的大小分别为？



分析与解：电场强度直接用库仑定律求解即可：

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

求磁场强度时，考察单个带电粒子的等效电流元：

$$I d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = dq \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = q\vec{v}$$

带入毕奥-萨伐尔定律可得：

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{qv}{r^2} \cdot \sin \theta$$

3.2、安培环路定理与磁场高斯定理

(1) 安培环路定理与电磁学中的高斯定律地位一致，他在求解静磁场问题中有着非常不错的效果。考虑静磁场中磁感应强度沿着闭合回路的积分，它就等于穿过该回路中所有电流强度代数和的 μ_0 倍，对应的表达式为：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

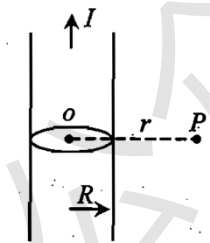
其中，当穿过回路的电流的方向与环路积分方向满足右手定则时，定义电流为正，否则电流为负。同时要注意的是，考虑空间中电流是否穿过回路，可以观察电流是否穿过回路围成的阴影面积，穿过的电流才纳入公式考察的范围之中。

(2) 磁场高斯定理描述的是磁感应线的连贯性，我们知道磁感应线都是首尾相连的、闭合的曲线，那么我们倘若取一个高斯面，则穿出高斯面的磁感应线必将穿回，即高斯面的净磁通量必须为零，因而有：

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

这个定理典型的一种应用场景在于，考虑磁介质表面垂直通过的磁感应线，我们如果取一个底面与表面平行的柱形高斯面，就会发现介质中垂直穿入的磁感应强度与空气中垂直穿出的磁感应强度大小一致，即磁感应强度垂直分量在介质表面的连续性。

例 17、求粗细均匀的圆柱形无限长载流导线中磁场的分布，已知导线中电流为 I ，半径为 R



分析与解：由旋转对称性，直接在半径为 r 处取一个轴对称的圆环回路即可，并规定圆环回路的正方向与电流方向满足右手螺旋定则，分以下两类情况讨论：1) $r > R$ ，这时列出安培环路定理：

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

得到：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (r > R)$$

2) $r < R$ ，有安培环路定理：

$$2\pi r B = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

得到：

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, \quad (r < R)$$

例 18、求无限长密绕螺线管内部磁感应强度 B

分析与解：对密绕螺线管拆开成电流元进行分析可知，螺线管外部的磁感应强度为零，螺线管内部的磁感应强度与螺线管直线方向平行，这也可以当成一个结论来记。接着在取一个矩形回路，两条长边分别位于螺线管内外且均与螺线管平行，短边穿过螺线管，假设长边的长度为 Δl ，由平移对称性可知，管内长边处处磁感应强度 B 相同，因而有：

$$B \cdot \Delta l = \mu_0 NI$$

其中 N 为 Δl 长度的矩形安培环路包含的螺线管电流匝数， I 为螺线管中通的电流强度。由于螺线管内长边的位置是任意的，且公式中未出现与位置相关的量，因此可以得到螺线管内磁感应强度大小处处相等、方向与螺线管直线方向平行，内部磁感应强度大小还可以写成：

$$B = \mu_0 \frac{N}{\Delta l} I = \mu_0 n I$$

其中 n 表示螺线管单位长度上绕的匝数。

3.3、洛伦兹力与安培力

(1) 洛伦兹力想必大家都非常熟悉，即磁场对运动电荷有力的作用，我们这里给出矢量叉乘的表达式：

$$\vec{F}_{\text{洛}} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

之后大家便可以直接用叉乘的右手螺旋定则直接去判断洛伦兹力的方向，比高中课本教学的方法更加简便一些。同时注意到洛伦兹力与速度方向垂直，因此洛伦兹力不做功。安培力描述的是带电流的导体在磁场中受力作用，分析带电粒子的微观运动不难发现，电流的实质其实就是带电粒子的定向运动，因此带电粒子定向运动的速度会受到洛伦兹力的作用，宏观上看好像是电流导体受到安培力作用一样。据此我们可以列出安培力的表达式：

$$\vec{F}_{\text{安}} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

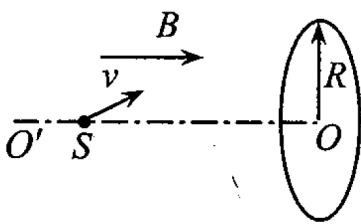
其中 \vec{L} 的方向即为电流的方向，也即正电荷的运动方向。

(2) 为什么洛伦兹力不能做功，安培力却可以做功？我们可以假设有一个导体棒在外力作用下，顺着平面导轨上向右运动，空间中有竖直向下的磁感应强度。此时由于电磁感应中导体棒切割磁感线会产生平面向上的电流，受到的安培力向左，与外力方向相反。再去分析带电粒子的微观运动可知，假设导体内是正电荷沿平面向上的运动产生电流，同时由于导体棒整体带动正电荷沿平面向右运动，那么正电荷的运动速度即为沿平面向上和沿平面向右的矢量叠加，受到的洛伦兹力沿平面左上方向。该

洛伦兹力沿平面向上方向的力驱动回路产生电流，沿平面向左的力宏观上表现为安培力。因此从微观角度去分析，正电荷受到的洛伦兹力并不做功，只是沿平面向上的分量驱动回路电流做正功，沿平面向左的分量宏观形成安培力做负功。即安培力其实只是洛伦兹力的一个分量！

(3) 利用附加速度法来求解重力场中小球受洛伦兹力影响下的运动（摆线）

例 19、如图所示，S 为一离子源，能够向各个方向发射质量为 m ，带电量为 q ，速度为 v 的正离子，在右侧有一半半径为 R 的圆盘，且空间中存在指向并垂直于盘面的匀强磁场 B 。在发射的粒子中发现无论离子源到盘面的距离如何，一部分离子总能打在圆盘上，求该部分粒子发射速度方向与 OO' 轴的夹角 θ 应满足什么关系。



分析与解：这是一个比较典型的类似磁聚焦模型的题。我们将速度按照沿着磁感应强度方向和垂直磁感应强度方向分解，易知只有垂直的速度分量才会受到洛伦兹力的影响，因此带电粒子沿着磁感应强度方向做匀速直线运动，在垂直磁感应强度平面内做一个与 OO' 轴相切的匀速圆周运动，该圆周运动半径为：

$$r = \frac{mv \sin \theta}{qB}$$

因此只需要满足：

$$r \leq \frac{R}{2}$$

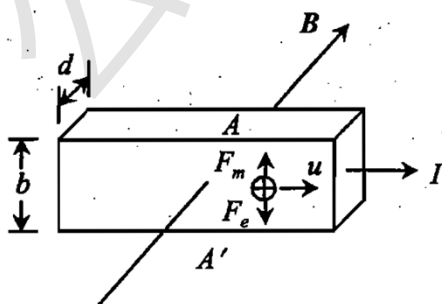
即：

$$\sin \theta \leq \frac{qBR}{2mv}$$

即可保证这部分粒子总能打在圆盘上。

3.4、霍尔效应

外磁场中的载流导体在与电流、外磁场均垂直的方向上会出现电荷分离而产生电势差或电场，这种效应称为霍尔效应。如图，设粒子平均运动速度为 u ，载流子数密度为 n ，则有：



$$I = nqu \cdot bd$$

平衡时，电荷受到的电场力应该与洛伦兹力平衡：

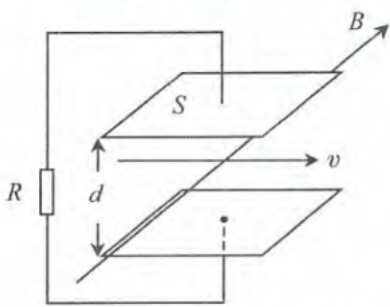
$$qE = quB$$

并利用霍尔电压 U 与极板间电场强度 E 的关系 $U = Eb$ ，可解得：

$$U = \frac{1}{nq} \cdot \frac{IB}{d} = k \cdot \frac{IB}{d}$$

其中 k 称为霍尔系数。

例 20、如图所示，一平行板电容器的两块极板面积均为 S ，极板间距为 d ，把它放入电阻率为 ρ 的导电液体流中。液体以流速 v 平行于极板流动。整个系统处于均匀磁场 B 中，矢量 \vec{B} 平行于极板且垂直于液流方向。将外电阻 R 接在电容器极板上，求电阻上放出的热功率。



分析与解：当导电流体流动稳定后，极板间会产生电场强度，带电粒子受到的电场力应该与洛伦兹力平衡：

$$qE = qvB$$

因此得到极板间电场强度：

$$E = vB$$

板间电压就相当于整个回路的电动势：

$$\varepsilon = U = Ed = Bvd$$

由于导电流体也有电阻率，因此列出回路电流 I 满足的关系：

$$I = \frac{\varepsilon}{R + \rho \frac{d}{S}} = \frac{Bvd}{R + \rho \frac{d}{S}}$$

则电阻上放出的热功率为：

$$P = I^2 R = \left(\frac{Bvd}{R + \rho \frac{d}{S}} \right)^2 R$$

例 21、(2020 清华强基) 海水中有竖直向下的磁场和水平方向由南向北方向的电场，则海水正负离子在东西方向上的运动情况为 (D)

- A、正离子向东运动，负离子向西运动
- B、正离子向西运动，负离子向东运动
- C、正离子向东运动，负离子向东运动
- D、正离子向西运动，负离子向西运动

分析与解：稍加分析易知选 D

3.5、磁矩

磁矩是一个非常重要的概念，在求解线圈所受力矩问题中非常关键。流有电流 I 的线框的磁矩为：

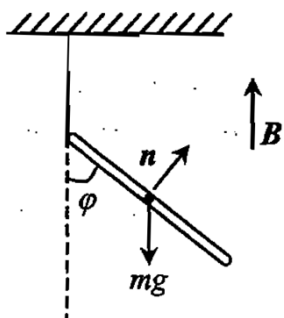
$$\vec{m} = IS \cdot \vec{n}$$

其中 S 为线框的面积大小， \vec{n} 为线框面积的法向， \vec{n} 的正方向与电流的环流方向满足右手螺旋定则的关系。对于匀强磁场 \vec{B} ，则可以求出线框整体所受安培力对应力矩矢量为：

$$\vec{M}_B = \vec{m} \times \vec{B}$$

需要注意的是，由磁矩公式算出的力矩相对任何参考点都成立，在计算时可能会用到力矩矢量某个方向的分量。

例 22、对于边长为 a 的正方形线框，质量为 m ，现将一边中点悬挂在天花板上。线框中通有恒定的电流 I 。体系位于方向竖直向上的匀强磁场当中，求线框的平衡位置。



分析与解：利用磁矩与力矩的关系式，可得安培力产生的力矩大小为：

$$M_B = Ia^2 B \cos \varphi$$

方向垂直纸面向外。而以悬挂点为参考点，重力产生的力矩方向垂直纸面向里，大小为：

$$M_G = mg \frac{a}{2} \sin \varphi$$

因此可得力矩平衡方程：

$$mg \frac{a}{2} \sin \varphi = Ia^2 B \cos \varphi$$

解得：

$$\tan \varphi = \frac{2IaB}{mg}$$

例 23、(2020 清华强基) 一根线电荷密度为 λ 的均匀带电绝缘杆置于水平面上，绕过固定点 O 的竖直轴以角速度 ω 旋转。已知杆的延长线始终为 O ，杆的一端与 O 的距离始终为 a ，另一端与 O 的距离始终为 b ，则 O 处的电场强度 E 和磁感应强度 B 大小，以及杆的磁矩 m 分别为？

分析与解：在离 O 点 r 处取一段长度为 dr 的元电荷，则元电荷在 O 处产生的电场强度为：

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dr}{r^2}$$

积分得：

$$E = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dr}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{b-a}{ab}$$

元电荷旋转形成环形电流，对一个周期来说，通过某个截面的电荷恰好为 dq ，因此电流强度满足：

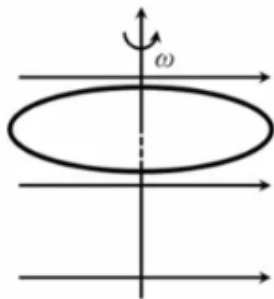
$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\lambda dr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\lambda \omega dr}{2\pi}$$

因此产生的磁感应强度和磁矩为：

$$B = \int_a^b \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\lambda \omega dr}{r^2} \cdot 2\pi r = \int_a^b \frac{\mu_0 \lambda \omega dr}{4\pi r} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$m = \int_a^b dI \cdot \pi r^2 = \int_a^b \frac{\lambda \omega dr}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\lambda \omega}{6} (b^3 - a^3)$$

例 24、(2021 清华强基) 如图所示, 一均匀带电圆盘半径为 R , 电荷的面密度为 σ , 放置在与圆盘平面平行, 磁感应强度为 B 的匀强磁场中。当圆盘以角速度 ω 绕过圆心且与圆盘表面垂直的竖直轴匀速旋转时, 试问有无安培力矩, 若有, 安培力矩为多大?



分析与解: 分析半径为 r 到 $r + dr$ 的圆环电荷, 其产生的电流为:

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \sigma \omega r dr$$

因此该圆环电流对应的磁矩方向竖直向上, 为:

$$dm = dI \cdot \pi r^2$$

因此整个带电圆盘旋转产生的磁矩为:

$$m = \int_0^R \sigma \omega r dr \cdot \pi r^2 = \int_0^R \sigma \omega \pi r^3 dr = \frac{1}{4} \sigma \omega \pi R^4$$

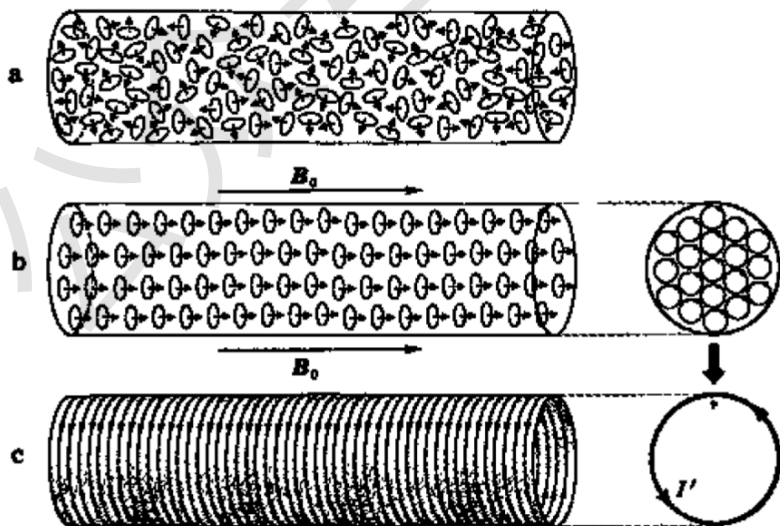
磁矩方向竖直向上, 因此整个带电圆盘受到的力矩为:

$$M = \frac{1}{4} B \sigma \omega \pi R^4$$

方向垂直纸面向里。

3.6、磁介质

(1) 生活中, 我们常常遇到与磁介质相关的问题, 例如通电螺线管内部插入一块铁芯, 其实这块铁芯就是所谓的磁介质。有关磁介质磁化的理论, 广泛被大家所接受的是分子电流观点。我们考虑一段插在线圈内的软铁棒, 按照安培分子环流的观点, 原子的核外电子绕原子核做圆周运动, 可以看成一个个环形电流, 安培将其统一定义为分子环流。在没有外磁场的作用下, 各分子环流的取向是杂乱无章的,



的, 如图中 a 情况所示。因此宏观看起来, 软铁棒不显示磁性。当螺线管通入电流后, 会在铁芯处产生一个外磁场 B_0 。如图中 b 情况所示, 在安培力的力矩作用下, 各分子环流的磁矩在一定程度上沿着外磁场的方向排列起来。图中 b 的右方是磁化后的软铁棒的横截面图。由图可以看出, 当均匀介质均匀磁化时, 由于分子环流的回绕方向一致, 在介质内部任何两个分子环流中相邻的那一

对电流元方向总是彼此相反的，它们的效果相互抵消，只有在横截面边缘上各段电流元未被抵消。因此宏观看起来，如图 c 情况所示，这横截面内所有分子环流的总体与沿截面边缘的一个大环形电流等效。由于在各个截面的边缘上都出现了这类环形电流，整体看来，磁化后的软铁棒就像一个由磁化电流组成的螺线管。这个磁化电流的“螺线管”在棒内部产生的磁感应强度 B' 方向与外磁场一致，因而在棒内的总磁感应强度 $B = B_0 + B'$ 比没有铁芯时的磁感应强度 B_0 大。这就是为什么铁芯能够使磁感应通量增加的道理。

(2) 与电极化矢量与电位移矢量的定义相类似，我们定义磁化强度矢量 \vec{M} 与磁场强度矢量 \vec{H} ，其中磁化强度矢量 \vec{M} 对应磁化电流，磁场强度矢量 \vec{H} 对应自由电流。他们分别满足各自的安培环路定理：

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = I'$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0$$

因此结合磁感应强度 \vec{B} 满足的安培环路定理：

$$\oint \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot d\vec{l} = I$$

可以得到 \vec{B} 、 \vec{M} 、 \vec{H} 之间的关系：

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

在各向同性的磁介质中，若给定磁介质的相对磁导率 μ_r ，则类比地存在如下关系：

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right)$$

(3) 能量密度

电场能量密度这个概念想要告诉大家的是，其实带电系统的电势能并不是储存在电荷中，而是储存在电场中。当各向同性的介质中分布有电场时，电场强度为 E 处的小体积空间内的电场能量密度为：

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$$

电场能量密度 w_e 定义为单位体积内储存的电势能。磁场能量也是通过场的形式加以储存，则类比可以得到各向同性磁介质的磁场能量密度表达式：

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}$$

从以上电介质与磁介质的讨论中我们会发现，电磁场之间的定律以及物理量有着一一对应的关系，梳理此等关系在我们类比记忆过程中可以起到非常有效的作用。以下整理了一些类比表格供大家参考。

电场	磁场
真空介电常数的倒数: $\frac{1}{\epsilon_0}$	真空磁导率: μ_0
相对介电常数的倒数: $\frac{1}{\epsilon_r}$	相对磁导率: μ_r
与总电荷相关的电场强度矢量: $\epsilon_0 \vec{E}$	与总电流相关的磁感应强度矢量: $\frac{1}{\mu_0} \vec{B}$
与自由电荷相关的电位移矢量: \vec{D}	与自由电流相关的磁场强度矢量: \vec{H}
与极化电荷相关的电极化矢量的 负值: $-\vec{P}$	与磁化电流相关的磁化强度矢量: \vec{M}
电场强度矢量、电位移矢量、电极化矢量之间的关系: $\vec{D} - \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}$	磁感应强度矢量、磁化强度矢量、磁场强度矢量之间的关系: $\vec{H} + \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$
各向同性电介质中电场强度矢量与电位移矢量的关系: $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$	各向同性磁介质中磁感应强度矢量与磁场强度矢量的关系: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}$
电场能量密度: $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$	磁场能量密度: $w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}$

例 25、(2021 清华强基) 一个中间有铁芯的密绕螺线管接通电流后, 在内部形成磁场, 设中间的能量密度为 w_1 。若铁芯从中间断成两截, 中间有一个很小的空隙, 则空隙中的能量密度和周围铁芯中的能量密度分别为 w_2 和 w_3 , 则 $w_1:w_2:w_3$ 为 (C) (注意, 此题不要求严格的定量计算, 下列选项中的 $\epsilon \gg 1$)

- A、1:1:1
- B、1:1:0.5
- C、1: ϵ :1
- D、1: ϵ :0.5

分析与解: 磁感线垂直穿过铁芯和空隙界面, 因此由磁场高斯定理推论知铁芯中的磁感应强度与空隙中的磁感应强度相等, 再结合磁场能量密度公式:

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}$$

空隙中 $\mu_r = 1$, 两边铁芯中 μ_r 很大, 易知选 C

4、电磁感应

4.1、感应电动势

(1) 首先由我们熟知的法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

其中负号代表感应电动势的方向会阻止线圈的磁通量变化，即楞次定律交代的内容。要注意的是，法拉第电磁感应公式中的磁通量 Φ 指的是线圈回路的总磁通量。即对于一个 N 匝的线圈，设每一匝线圈都会产生磁通量 Φ_0 ，线圈回路的总磁通量等于各匝线圈磁通量的加和：

$$\Phi = N\Phi_0$$

(2) 假设感应电动势接在一个回路当中，回路的总电阻为 R ，结合欧姆定律可知：

$$\varepsilon = IR = -\frac{d\Phi}{dt}$$

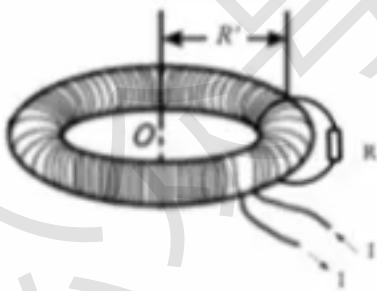
即通过移项可以得到：

$$dq = Idt = -\frac{d\Phi}{R}$$

积分得到电磁感应中回路磁通量变化与电荷量的关系式：

$$\Delta q = -\frac{\Delta\Phi}{R}$$

例 26、(2021 清华强基) 如图，一密绕螺线管通以电流 I ，现改变电流方向，大小不变，即电流由 I 变为 $-I$ ，已知 μ_0 、螺线管内部铁芯的相对电导率 μ_r 、螺线管半径为 R' （远大于管截面半径）、横截面积 S 、匝数 N ，在螺线管某处套上另一个带有阻值为 R 的电阻的圆环回路（不接入原来的回路），则过程通过该电阻的电量为？



分析与解：当螺线管内插有磁介质时，由于螺线管内的自由电流大小不变，因此在管内产生的磁场强度不变，因此螺线管内的磁感应强度为不插介质时的 μ_r 倍：

$$B = \mu_0\mu_r nI = \mu_0\mu_r \frac{N}{2\pi R'} I$$

对螺线管来说，磁通量变化大小为：

$$\Delta\Phi = 2BS = \mu_0\mu_r \frac{N}{\pi R'} IS$$

则通过的电量大小为：

$$\Delta q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\mu_0\mu_r NIS}{\pi RR'}$$

4.2、感生电动势

(1) 感应电动势分为动生电动势和感生电动势，当磁场不变，回路中的导体杆运动切割磁感线产生的感应电动势称为动生电动势；当磁场随时间变化，回路静止不动，由此产生的感应电动势称为感生电动势。对于感生电动势的情形，感生电动势来源于感应的涡旋电场所产生的非静电力。对于圆对称以变化率为 k 均匀变化磁场产生的感生电场，有：

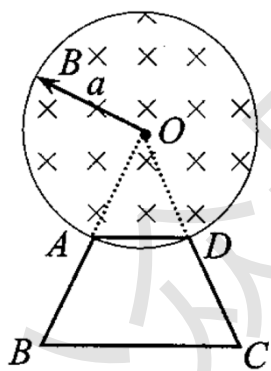
$$E \cdot 2\pi r = \frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2$$

即：

$$E = \frac{kr}{2}$$

(2) 我们常常会遇到在圆对称的磁场中放置一导体棒并求棒两段的电动势的问题，如果用棒各处感生电场对路径求积分的方式去求电动势，那么问题将变得非常复杂。因此我们为了简化问题，常常把棒两端分别与磁场圆中心相连，模拟两条连线上分别分布有导体杆，真实的导体棒与两条虚拟的导体杆便构成了一个三角形的导体回路。由于涡旋电场是处处沿着切线方向，与两条模拟连线导体杆方向处处垂直，因此易知两条模拟连线导体杆产生的感生电动势均为零。因此我们要求解的导体棒两端的感生电动势就等于整个回路产生的感生电动势，由此轻易得解。

例 27、在半径为 a 的细长螺线管中，均匀磁场的磁感应强度随时间均匀增大，增长率为 b 。一均匀导线弯成等腰梯形闭合回路 ABCDA，上底长为 a ，下底长为 $2a$ ，总电阻为 R ，放置如图所示。试求：(1) 梯形各边上的感生电动势，及整个回路中的感生电动势 (2) B、C 两点间的电势差。



分析与解：(1) 利用上述内容的分析，易知圆对称的磁场产生的涡旋电场均为切向，与 AB、CD 边的导线处处垂直，因此 AB、CD 边的感生电动势为 0。对于 AD 边，连接 OA、OD，同理由 OA、OD 边感生电动势为 0，则 AD 边的感生电动势就与三角形回路 OAD 产生的感生电动势一致，即 AD 边的感生电动势大小为：

$$\varepsilon_{AD} = \frac{d\Phi}{dt} = S \frac{dB}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 b$$

AD 边的感生电动势方向由楞次定律判断为 A 到 D。BC 边产生的感应电动势利用相同方法求解，但要注意等边三角形 OBC 回路中只有部分扇形区域有磁通量，面积需要带入有磁场通过的面积部分，因此有 BC 边的感生电动势大小：

$$\varepsilon_{BC} = \frac{1}{6} \pi a^2 b$$

BC 边的感生电动势方向为 B 到 C。整个回路中的感生电动势可以用 $\varepsilon_{BC} - \varepsilon_{AD}$ 来表示，也可以直接用法拉第电磁感应定律，查看回路中磁通量的变化来表示，即可得到整个回路中的感生电动势为：

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2b$$

方向沿回路的逆时针方向。

(2) 要考察 BC 两点间的电势差，则必须把回路的等效电路图画出来。因此回路的电流沿逆时针方向，电流大小为：

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{a^2b}{R}$$

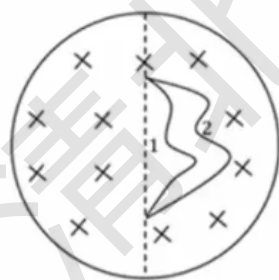
我们先利用比例关系算出 BC 边导线的电阻：

$$r_{BC} = \frac{2}{5}R$$

利用数电压法读出 B、C 两点间的电势差为：

$$U_{BC} = -\varepsilon_{BC} + I \cdot r_{BC} = -\left(\frac{1}{10}\pi + \frac{\sqrt{3}}{5}\right)a^2b$$

例 28、(2021 清华强基) 有一圆形磁场，磁感应强度为 B ， $\frac{dB}{dt}$ 为一定值，记 $\varphi_i = \left| \int \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \right|$ 。其中 1 为一根导线，2 为绝缘线，它们的两端都在过直径的直线上，则 (BD)



- A、 $\varphi_1 = \varphi_2$
- B、 $\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0$
- C、 $\varphi_1 > \varphi_2$
- D、 $\varphi_1 < \varphi_2$

分析与解：导线和绝缘线都为电势 φ_i 提供了积分路径，因此只要路径确定下来，无论是哪种材料的两端都会出现电势差，B 正确。接着为了判断哪根线两端的电势比较高，我们依然连接两端与磁场圆中心，易知路径 2 回路围成的面积大于路径 1 回路围成的面积，由此可得 D 正确。

4.3、自感与互感

(1) 自感与自感系数：当回路中电流发生变化时，它所激发的磁场通过回路自身的磁通量也发生变化，回路中由此而产生阻碍电流变化的感生电动势，这种现象称为自感现象。自感系数定义为回路中具有电流 I 时，通过回路的磁通量与电流之比，即：

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

当线圈中的电流发生改变时，依法拉第电磁感应定律可得，回路产生的自感电动势表达式为：

$$\varepsilon_{\text{自}} = -L \frac{dI}{dt}$$

负号代表自感产生的电动势具有阻碍电流改变的作用。经计算可得，自感磁能具有的能量表达式为：

$$W_L = \frac{1}{2} LI^2$$

(2) 互感与互感系数：对于两个线圈，其中一个线圈电流变化所引起的另一个线圈产生感生电动势的现象叫做互感，产生的电动势也叫互感电动势。与自感系数定义类似，互感系数的定义为一个线圈在另一个线圈中产生的磁通量与电流的比值：

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

可以证明，对于特定的两个线圈，互感系数相等，即

$$M_{12} = M_{21}$$

此时体系具有的能量为：

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

例 29、(2023 清华强基) 将一根自感为 L 的电感线圈对半剪断，问其中半段线圈的电感为多少？

分析与解：线圈剪断一半意味着匝数减少一半，那么在电流不变时，线圈总磁通量减少一半，即根据电感定义知，半段线圈的电感为 $\frac{L}{2}$

5、交流电

5.1、交流电的峰值与有效值

在一个电路里，如果电源的电动势随时间变化的关系是正弦函数或余弦函数，这种交流电叫做简谐交流电。与简谐振动相同，为了描述交流电同样需要振幅，频率以及相位等参量。对于峰值为 U_0 的简谐交流电，随时间表达式可以写成：

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

简谐交流电的有效值定义为，通过电阻时产生相同的电热所需要的直流电的电流大小，可以证明电流的有效值与峰值之间的关系为：

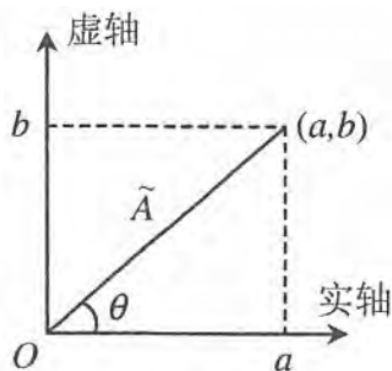
$$U = U_0 / \sqrt{2}$$

对于电流也具有相同的关系。对于交流电压表以及交流电流表，其测量的均为电压及电流的有效值。

5.2、交流电的复数解法

(1) 首先我们扩展一下数学中复数的内容，考虑任一复数：

$$\tilde{A} = a + bi$$



式中 a 为复数 \tilde{A} 的实部， b 为复数 \tilde{A} 的虚部。我们在复平面坐标系中去考察复数 \tilde{A} ，图中斜边边长 A 即为复指数的模，满足：

$$A = |\tilde{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

斜边与实轴的夹角 θ 满足：

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

因此我们可以将复数 \tilde{A} 用欧拉公式表示为：

$$\tilde{A} = A(\cos \theta + i \sin \theta) = Ae^{i\theta}$$

可以看出其实欧拉公式就是复平面的“直角坐标系”转化为“极坐标系”的等价公式。

(2) 有了复数知识基础后，我们便可以用其来简化交流电中的物理公式。首先我们把简谐交流电中的任何一个瞬时量分别写成对应的复数形式的实部，例如把电动势、电压、电流瞬时值写成对应的复数形式的实部：

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(\tilde{\varepsilon}) = \operatorname{Re}(\varepsilon_0 e^{i(\omega t + \varphi)})$$

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(\tilde{U}) = \operatorname{Re}(U_0 e^{i(\omega t + \varphi)})$$

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(\tilde{I}) = \operatorname{Re}(I_0 e^{i(\omega t + \varphi)})$$

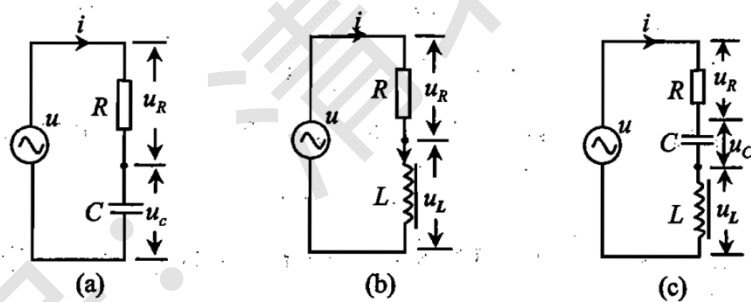
那么在之后求解简谐交流电路问题时，将对应瞬时量改为复指数的形式构成新复指数形式的方程，若复指数形式方程成立，则原方程即为复指数形式方程的实部分量，那也必然成立。由于复指数形式方程数学求解过程较为简便，因此利用复数求解交流电将会大大减少计算量。

(3) 元件的复阻抗：对于不同元件来说，其在交流电路中的特性大不相同。例如，电阻元件在交流电路中，当电阻两端电压瞬间发生变化，电流也随之瞬间变化。而对于电容元件，其两端电压变化需由电流流入导致电容两端电荷量发生变化而导致，因此电容两端的电压的相位相对于电流会延迟 $\frac{\pi}{2}$ 的相位。同理，对电感元件来说，若电感直接接在电路的电动势两端，电感两端的电压的变化即与电动势变化一致，但由于电感产生的自感电动势会阻止回路电流的变化，因此电感两端的电压的相位相对于电流会超前 $\frac{\pi}{2}$ 的相位。因此我们将相位的因素考虑进电路基本方程中，可以定义各元件的复阻抗：

$$\widetilde{Z}_R = R, \quad \widetilde{Z}_L = i\omega L, \quad \widetilde{Z}_C = \frac{1}{i\omega C} = -i\frac{1}{\omega C}$$

这里利用 $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ 、 $\frac{1}{i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ 可以看出，电容和电感的阻抗里分别都包含了其两端电压超前还是落后电流的相位因子，也方便我们记忆。因此之后我们可以将简谐交流电路回路方程的电流、电压、电动势以及电阻、电容、电感通通用复变量的形式带入而简化求解，当复指数方程成立，原方程对应复指数方程的实部分量也必将成立。

例 30、对于如图所示的三种电路连接方式，求每个元件两端电压的有效值与电源电压有效值之间的关系。



分析与解：有效值之间的比例就和峰值比例相同，也就和复指数的模之比相同，利用电路的复指数解法分析图 (a) 中的电路：

$$\tilde{u} = \tilde{i} \cdot (\widetilde{Z}_R + \widetilde{Z}_C) = \tilde{i} \cdot \left(R - i\frac{1}{\omega C} \right)$$

$$\tilde{u}_R = \tilde{i} \cdot \widetilde{Z}_R = \tilde{i} \cdot R$$

$$\tilde{u}_C = \tilde{i} \cdot \widetilde{Z}_C = \tilde{i} \cdot \left(-i\frac{1}{\omega C} \right)$$

因此有效值之比等于复指数的模之比，即：

$$\frac{u_R}{u} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

$$\frac{u_C}{u} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}}$$

同理对图 (b) 的电路:

$$\frac{u_R}{u} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$
$$\frac{u_L}{u} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

对 (c) 的电路:

$$\tilde{u} = \tilde{i} \cdot (\tilde{Z}_R + \tilde{Z}_C + \tilde{Z}_L) = \tilde{i} \cdot \left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right]$$

所以:

$$\frac{u_R}{u} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\frac{u_C}{u} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\frac{u_L}{u} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

6、电磁波

6.1、电磁波

麦克斯韦进一步提出，既然变化的磁场可以产生电场（涡旋电场），那么变化的电场也可能产生磁场。据此，他提出了位移电流假设，即变化的电场形成位移电流，位移电流与其他电流一样也在周围产生磁场，因此变化的电场会产生磁场。从而建立了完整的麦克斯韦方程，把电和磁统一在同一个方程组中。麦克斯韦方程组的正确性，不仅仅体现在麦克斯韦总结了前人的成果，同时还预言了电磁波的存在。赫兹实验的成功表面上是对电磁波存在的验证，但实际上是证明了麦克斯韦关于涡旋电场和位移电流假设的正确性。

例 1、(2020 清华强基) 电导率为 σ ，相对介电常数为 ϵ_r 的介质填充到半径为 R ，间距为 h 的平行板电容器当中，在电容器两极板间加电压 $V = \beta t$ ，则在电容器中距离中轴线 r 处的电场强度与磁感应强度分别为 (B)

$$A、E = \frac{\beta t}{h}, B = \frac{\mu_0 r \beta \sigma t}{2h}$$

$$B、E = \frac{\beta t}{h}, B = \frac{\mu_0 r \beta (\sigma t + \epsilon_0 \epsilon_r)}{2h}$$

$$C、E = \frac{\beta t}{\epsilon_r h}, B = \frac{\mu_0 r \beta \sigma t}{2h}$$

$$D、E = \frac{\beta t}{\epsilon_r h}, B = \frac{\mu_0 r \beta (\sigma t + \epsilon_0 \epsilon_r)}{2h}$$

分析与解：变化的磁场会产生电场，变化的电场会产生磁场。由于旋转对称性，平行板间的电场是均匀的。无论如何，总电场强度（包含静电场和变化的磁场产生的电场）乘以间距必定等于两极板间的电压，因此有：

$$E = \frac{V}{h} = \frac{\beta t}{h}$$

我们首先求出电流产生的净磁场，由安培环路定理知：

$$B_0 = \frac{\mu_0 \sigma E \cdot \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 r \beta \sigma t}{2h}$$

而变化的电场也会产生部分磁场，所以最后的磁场肯定要在此基础上附加上一个值，因此最终：

$$B = \frac{\mu_0 r \beta (\sigma t + \epsilon_0 \epsilon_r)}{2h}$$

选 B

三、热学篇

1、理想气体状态方程

(1) 阿伏伽德罗定律：在同温同压下，相同体积的任何气体含有相同的分子数。物质所含的分子数和原子数量（称作物质的量）是十分巨大的，所以，常用摩尔（符号为 mol ）作为分子、原子的数量单位。摩尔是这样规定的：质量 $12g$ 的碳中所含的原子数为 $1mol$ 。按照这一规定，实验测量出 $1mol$ 等于 6.0221415×10^{23} ，这一数值就是阿伏伽德罗常数，记作 N_A 。

(2) 玻意耳定律：一定质量的某种气体，在温度不变的情况下，压强与体积成反比。

(3) 盖吕萨克定律：对于一定质量的某种气体，当压强保持不变时，它的体积随温度线性地变化。

(4) 查理定律：对于一定质量的气体，当体积保持不变时，它的压力随温度线性地变化。

(5) 理想气体的状态方程：

$$pV = \nu RT$$

其中， p 为压强， V 为体积， ν 为物质的量， T 为温度。 R 为比例常量，称为普适气体常量， R 等于 $8.31J/(mol \cdot K)$ 。

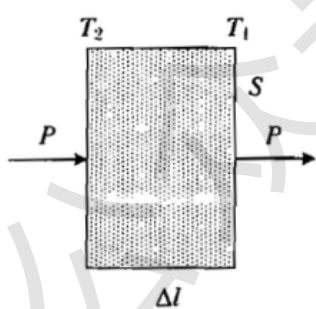
(6) 道尔顿分压定律：体积为 V 的混合气体所产生的压强，等于其中各成分气体在体积为 V 时单独产生的压强之和。

2、热传递的各种形式

(1) 热传导

1) 热传导是通过接触的方式传递热量的。例如食物制作过程中的煎、炒、烹、炸、煮，都是通过食物与热锅、热油或热水接触使食物达到高温状态而变熟的。热传导过程既可以在两个物体之间发生，也可以在同一物体的不同部分之间发生。

2) 热传导定律：研究表明，热传导的速率与传热介质的截面面积成正比，也与传热介质中单位长度



距离的温度差（即温度梯度）成正比，即：

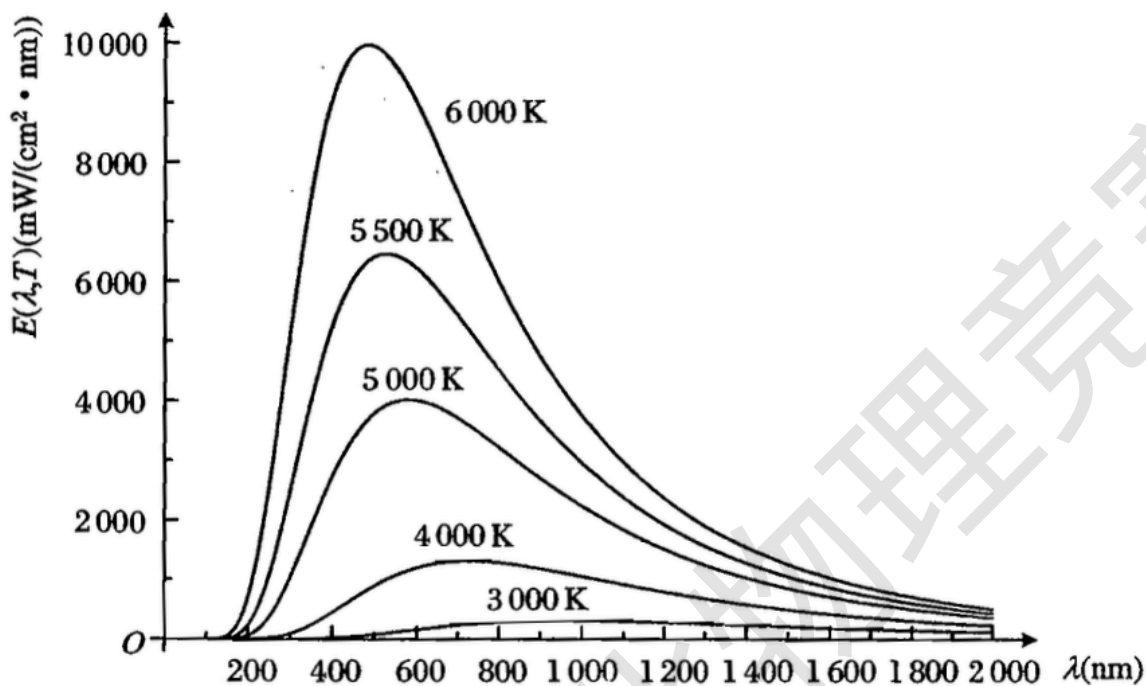
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta l} S$$

其中， ΔQ 为时间 Δt 内所传递的热量， ΔT 为距离 Δl 上的温度差， S 为接触部分的截面面积，比例系数 κ 称作热导率。

(2) 热辐射

1) 阳光照在身上，会使人觉得暖洋洋的，这就是热辐射的效果。从微观上看，热辐射是带电粒子热运动产生的。构成物质的原子、分子都在做无休止的热运动，它们的正电中心与负电中心也往往不重合，从而呈现出极性。这些带电的粒子，包括有极性的粒子，速度改变时，会发出电磁辐射。这种辐射是由热运动而引起的，因而称作热辐射。

2) 实验上测得的黑体辐射的规律如图所示。图中横坐标是电磁辐射的波长 λ ，纵坐标是在某一温度 T 下，单位时间内通过单位截面的单位波长内的辐射通量 $E(\lambda, T)$ ，实际上就是黑体在单位波长内辐射的功率密度，简称单色辐出度或辐射本领。



在每一温度下，某一波长的单色辐出度是最大的，即每一条辐射曲线都有一个最大值。温度低时，最大值所对应的波长较长；温度高时，最大值所对应的波长较短。如果用 λ_{max} 表示单色辐出度最大的波长，则 λ_{max} 与黑体温度 T 之间的关系为：

$$T\lambda_{max} = b$$

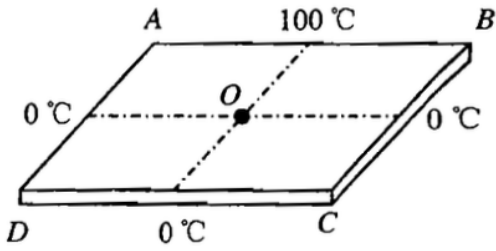
称作维恩位移定律，其中， $b = 2.8978 \times 10^{-3} m \cdot K$

3) 辐射曲线下的面积就是黑体在这一温度下的总辐射功率密度，即黑体单位表面积的热辐射功率。实验表明，黑体辐射的功率密度只与温度有关，温度越高，辐射的功率密度越大，可表示为：

$$\Phi(T) = \sigma T^4$$

这就是斯特藩-玻尔兹曼定律，其中， $\sigma = 5.67032 \times 10^{-8} W/(m^2 K^4)$ 为斯特藩-玻尔兹曼常量。

例 1、设正方形铜制薄板的一个端面温度维持在100摄氏度，其余三个端面温度维持在0摄氏度。求薄板中心 O 处的温度。



分析与解：由热传导定律，结合对中心 O 点的能量输入输出守恒：

$$\kappa \frac{100 - T_o}{\Delta l} S = 3\kappa \frac{T_o - 0}{\Delta l} S$$

由于传输的对称性，可知上式其他的比例系数都可以消去，只剩下：

$$100 - T_o = 3T_o$$

即得：

$$T_o = 25 \text{ 摄氏度}$$

例 2、从地球看太阳，张角约为 0.53° ，设地球表面的平均温度为 $300K$ ，不考虑地球对日光的反射，试估算太阳表面的温度 T

分析与解：假设地球的半径为 r ，太阳的半径为 R ，太阳到地球的距离为 d ，题给张角为 α ，地球表面的平均温度为 T_o 。则太阳的辐射功率 P 为：

$$P = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$$

地球接收到太阳的辐射功率 P_o 只是其一部分：

$$P_o = \frac{P}{4\pi d^2} \pi r^2$$

再由地球的辐射吸收与发射平衡方程：

$$P_o = \sigma T_o^4 \cdot 4\pi r^2$$

再由地球看太阳的夹角满足关系：

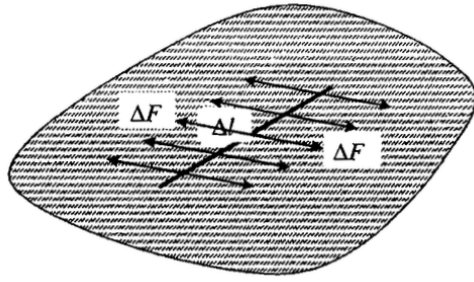
$$\alpha = 2 \frac{R}{d}$$

联立即得：

$$T = T_o \cdot \sqrt[4]{\frac{4d^2}{R^2}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} T_o = 6238.42K$$

3、液体的表面张力

(1) 液体表面张力的来源：液体表面分子之间的引力较大，因而使得这一层分子较紧密地结合，形成一个具有一定弹性的薄膜，整个薄膜有向液体内部收缩的趋势，同时在表面上的任何一条线都受到向两侧的拉力，这就是液体的表面张力。



实验表明，表面张力的大小与液体的种类、液面两侧的物质种类、环境温度等因素有关。张力的
大小还与上述线的长度有关。液面上一段长度为 Δl 的线段所受到的表面张力可表示为：

$$\Delta F = \sigma \Delta l$$

其中， σ 称作表面张力系数，表示液面上单位长度线段的表面张力。

(2) 表面张力引起的压强：表面张力都是沿着表面的切向的，因而，平直的液面不会由于表面张力
产生额外的压强。但是，若液面是弯曲的，则会产生指向曲率中心一侧的压强。

如图所示，我们考虑一个任意液面，在表面上M点附近取一个很小的区域ABCD，可以证明，对于
一个足够小的曲面，其平均曲率是确定的。对于

任意一对过法线且相互垂直的平面，如果它们与
曲面交线的曲率半径分别是 R_1, R_2 ，则M点处的

平均曲率 $\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ 是定值。

用 $\Delta\theta$ 角表示 P_1P_2 段圆弧所对角度的一半，BC段
和AD段表面张力引起的沿法线方向的分力为：

$$\Delta f_1 + \Delta f_1' = 2\sigma \overline{Q_1Q_2} \Delta\theta$$

用 $\Delta\varphi$ 角表示 Q_1Q_2 段圆弧所对角度的一半，AB段
和CD段表面张力引起的沿法线方向的分力为：

$$\Delta f_2 + \Delta f_2' = 2\sigma \overline{P_1P_2} \Delta\varphi$$

区域ABCD的面积为：

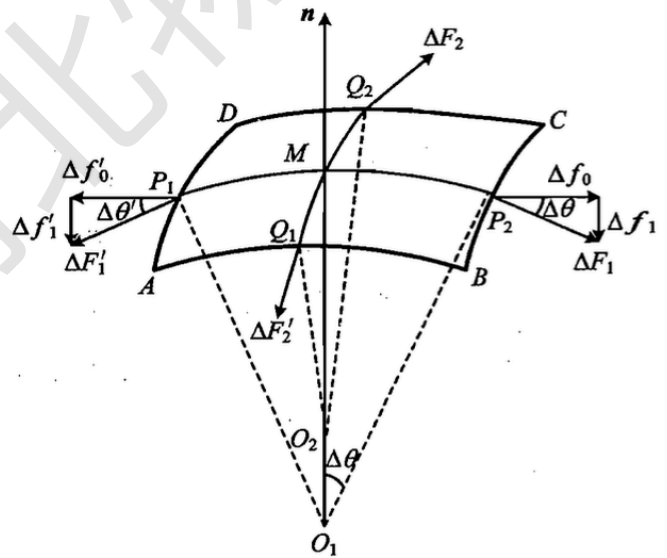
$$\Delta S = \overline{P_1P_2} \times \overline{Q_1Q_2} = 4R_1R_2\Delta\theta\Delta\varphi$$

则M点的压强为：

$$\Delta p = \frac{\Delta f_1 + \Delta f_1' + \Delta f_2 + \Delta f_2'}{\Delta S} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{R}$$

对于球形液面， $R_1 = R_2 = R$ ，表面张力引起的压强为：

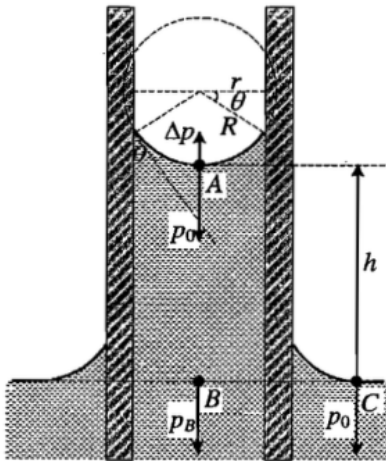
$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$$



对于液体形成的球形空泡，由于它具有内外两个表面，每个表面都产生压强，所以空泡的表面张力引起的压强为：

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R}$$

(3) 毛细现象：毛细管是指内径很细（当然比毛发要粗得多）的管子（内部通常圆柱形）。进入毛细管内部的液体，如果浸润内壁，则靠近管壁的液面将会升高，此现象就称为毛细现象。



如图所示，由于毛细管的内径较小，可以近似地认为管内的液面为球面。设球面半径为 R ，细管内半径为 r ，接触角为 θ 。则管壁与液面边界的接触长度为 $2\pi r$ ，液柱受表面张力呈旋转对称性斜向上方，与竖直方向呈 θ 角。因此表面张力向上的部分抵消液柱的重力，有：

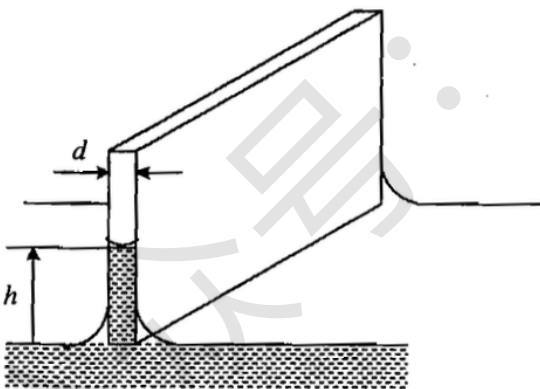
$$\sigma \cdot 2\pi r \cdot \cos \theta = \rho \cdot \pi r^2 h \cdot g$$

从而得到：

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}$$

当然，利用毛细液柱弯曲液面的附加压强也可以得到相同的结论。

例3、如图所示，两铅垂玻璃的平板部分浸入水中，设其间距为 $d = 0.50\text{mm}$ ，问两板间水面上升的高度为多少？（接触角可视为0，水的表面张力系数为 $\sigma = 7.3 \times 10^{-2}\text{N/m}$ ）



分析与解：我们取沿着平板平面竖直面方向和垂直平板平面的竖直方向两个正交的法线方向，得到曲率半径分别为：

$$R_1 = \infty$$

$$R_2 = \frac{d}{2}$$

则附加压强为：

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{d}$$

附加压强等于液柱重力产生的压强，因而有：

$$\Delta p = \rho g h$$

解得：

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g d} = 0.0292\text{m}$$

4、热力学第一定律

(1) 若系统经历一个热力学过程，其中系统从外界所吸收的热量为 Q ，外界对系统所做的功为 W ，而系统内能的增量 $\Delta U = U_2 - U_1$ 。则该过程的热力学第一定律可以表示为：

$$\Delta U = Q + W$$

式中，若系统从外界吸热，则 $Q > 0$ ，若系统对外放热，则 $Q < 0$ ；若外界对系统做功，则 $W > 0$ ，若系统对外界做功，则 $W < 0$

(2) 理想气体的内能表达式：理想气体的内能只是温度的函数，而与体积无关。若一定量的理想气体在经历一个热力学过程中体积保持不变，这一过程就是定容过程。在定容过程中，外界不对气体做功， $W = 0$ ，则热力学第一定律为：

$$\Delta U = Q$$

定义1mol气体温度升高1K所吸收的热量为摩尔热容，则定容过程中的摩尔热容为：

$$c_{V,m} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{Q}{\Delta T} \right)_V = \frac{1}{\nu} \left(\frac{\Delta U}{\Delta T} \right)_V$$

即内能可以表述为：

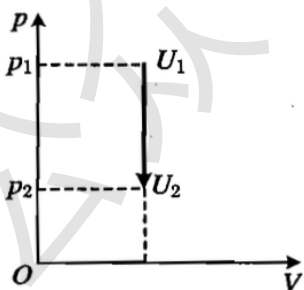
$$\Delta U = \nu c_{V,m} \Delta T$$

气体因其分子结构构成的不同，对应的定容摩尔热容也不尽相同，满足以下规律：

- 1) 单原子分子：其自由度为3，因而定容摩尔热容为 $c_{V,m} = \frac{3}{2}R$
- 2) 双原子分子：其自由度为5，因而定容摩尔热容为 $c_{V,m} = \frac{5}{2}R$
- 3) 多原子分子：其自由度为6，因而定容摩尔热容为 $c_{V,m} = 3R$

(3) 四大特征热力学过程

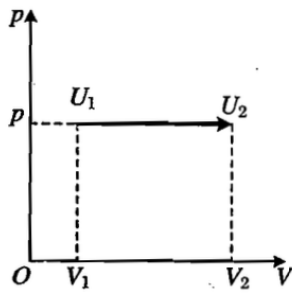
理论上，热力学过程研究的都认为是准静态过程，即过程进行得足够慢，在过程中的每一时刻，整个系统都处于平衡态。



1) 定容过程

定容过程中外界不对系统做功，系统内能的增量等于系统从外界吸收的热量，即：

$$\Delta U = Q = \nu c_{V,m} \Delta T$$



2) 定压过程

在定压过程中，外界对系统所做的功为：

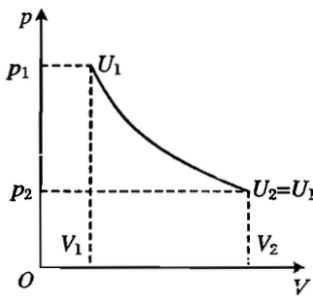
$$W = -p\Delta V = -\nu R\Delta T$$

则定压过程中气体吸收的热量为：

$$Q = \Delta U - W = \nu(c_{V,m} + R)\Delta T = \nu c_{p,m}\Delta T$$

即定压摩尔热容与定容摩尔热容的关系为：

$$c_{p,m} = c_{V,m} + R$$



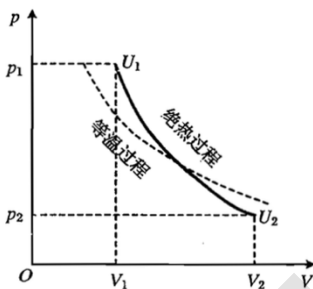
3) 等温过程

理想气体在等温过程中，温度保持恒定。可以算得等温过程中外界对气体所做的功为：

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -pdV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = -\nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

等温过程中气体内能不变，因此气体吸收的热量为：

$$Q = -W = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$



4) 绝热过程

对理想气体状态方程两边微分可得：

$$Vdp + pdV = \nu RdT$$

绝热过程对应 $dQ = 0$ ，则热力学第一定律微分形式：

$$dW = -pdV = \nu c_{V,m}dT$$

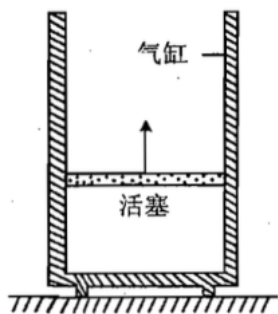
联立上式即可得：

$$-\frac{c_{V,m} + R}{c_{V,m}} \cdot \frac{dV}{V} = \frac{dp}{p}$$

记 $\gamma = \frac{c_{p,m}}{c_{V,m}} = \frac{c_{V,m} + R}{c_{V,m}}$ ，积分即可得到绝热方程：

$$pV^\gamma = \text{Const}$$

例 4、如图所示，在一个质量为 M 、内部横截面面积为 A 的竖直放置的绝热气缸中，用活塞封闭了一定的温度 T_0 的理想空气。活塞是绝热的，气缸活塞质量以及活塞和气缸之间的摩擦力可忽略不计。已知大气压强为 p_0 ，重力加速度为 g 。现将活塞缓慢上提，当活塞到达气缸开口处时，气缸刚好离开地面。求活塞到达气缸开口处时气体的温度。



分析与解：由于气缸活塞质量可忽略，则初始状态气体的压强为 p_0 。末状态活塞到达气缸开口时，其压强变为：

$$p = p_0 - \frac{Mg}{A}$$

整个过程为一绝热过程，则有绝热方程：

$$pV^\gamma = \text{Const}$$

结合理想气体状态方程：

$$pV = \nu RT$$

可以得到关于 p 、 T 的绝热方程：

$$p^{1-\gamma} \cdot T^\gamma = \text{Const}$$

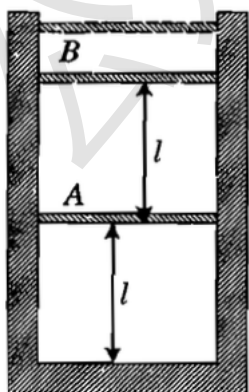
由于空气是双原子分子，得到此过程中：

$$\gamma = \frac{7}{5}$$

联立上述方程即可解得：

$$T = T_0 \cdot \left(\frac{p_0}{p_0 - \frac{Mg}{A}} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 \cdot \left(\frac{p_0}{p_0 - \frac{Mg}{A}} \right)^{-\frac{2}{7}}$$

例 5、设绝热圆筒中导热轻活塞 A 和不导热重活塞 B 将圆筒分为长度 l 均为 $0.4m$ 的两室，每室中有 $1mol$ 单原子气体。活塞 B 可无摩擦运动。现对其缓慢加热，使其吸收 $200J$ 热量。当 A 和器壁间摩擦力为多大时，该活塞将保持不动？



分析与解：由于 A 中气体是等容过程，B 中气体是等压过程，且 A 活塞导热会导致两室内气体温度始终一致，假设加热过程温度改变 ΔT ，因此有热量关系：

$$200J = \frac{5}{2}R\Delta T + \frac{3}{2}R\Delta T = 4R\Delta T$$

解得：

$$\Delta T = \frac{50}{R} = 6.017K$$

对下方气体，假设其体积为 V ，有理想气体状态方程：

$$\Delta p \cdot V = R \cdot \Delta T$$

设 A 和器壁间摩擦力为 f ，活塞 A 的面积为 S ，由于上方气体一致保持原来的压强，则有：

$$\Delta p = \frac{f}{S}$$

联立即得：

$$f = \frac{R \cdot \Delta T}{l} = 125N$$

例 6、(2021 清华强基) 一绝热气缸中封闭了体积为 $1.4L$ 的空气。瓶口的绝热活塞质量 $m = 0.3kg$ ，截面积 $1.5cm^2$ ，初始时处于平衡状态。大气压强 $p_0 = 1 \times 10^5 Pa$ ，重力加速度 $g = 10m/s^2$ ，则活塞受到微扰后的运动周期为 (A)

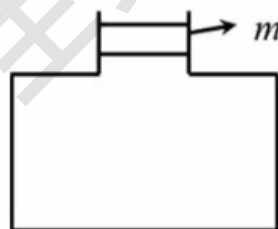
A、2.1s

B、2.5s

C、2.6s

D、2.9s

E、以上无正确答案



分析与解：对气缸中的气体而言，小振动过程是一个绝热过程。假设活塞相对平衡位置向上为正方向建立 x 坐标轴，当活塞的坐标为 dx 时，设活塞截面积为 S ，则气体体积改变量为：

$$dV = S \cdot dx$$

设一开始活塞处于平衡位置处，气体的体积为 V_0 ，则振动过程有绝热方程：

$$\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot V_0^\gamma = p \cdot (V + S \cdot dx)^\gamma$$

解得：

$$p = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot \left(\frac{V_0}{V_0 + S \cdot dx}\right)^\gamma = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot \left(1 + \frac{S}{V_0} dx\right)^{-\gamma}$$

利用小量近似可得：

$$p = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot \left(1 - \gamma \frac{S}{V_0} dx\right)$$

于是分析活塞的受力即可得到合外力为：

$$F = pS - p_0S - mg = -\gamma \frac{S}{V_0} (p_0S + mg) \cdot dx$$

因此简谐振动的运动周期为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mV_0}{\gamma S \cdot (p_0S + mg)}} = \frac{2\pi}{3} = 2.094s$$

5、循环过程

(1) 热力学循环特指某一热力学系统经历了一系列热力学状态变化，最后又回到初始的热力学状态的过程。在热力学循环过程中，参与循环并且状态不断变化的物质称作工作物质。为了描述循环过程，都是尽可能将实际的过程简化，并假设每一步过程都是准静态的。

(2) 热机通过从外界吸收热量使工作物质的内能增加，并将一部分增加的内能通过做功的方式转化机械能，另一部分增加的内能以热量释放，完成循环，工作物质回到初始状态。若循环过程中工作物质从外界吸收的总热量为 Q_1 ，向外界释放的热量为 Q_2 ，则根据热力学第一定律，系统对外界所做的功就是 $W = Q_1 - Q_2$ ，循环热机的效率定义为：

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

(3) 卡诺循环：如图所示，工作物质（气体）在温度恒定的两个热源之间，气体经历循环的过程是：等温膨胀（1→2）、绝热膨胀（2→3）、等温压缩（3→4）、绝热压缩（4→1），回到初态。若高温热源温度为 T_1 ，低温热源温度为 T_2 。



由过程的可以看出，卡诺循环只在（1→2）过程吸热，（3→4）过程放热，因此气体从高温热源吸热：

$$Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

气体向低温热源放热：

$$Q_2 = \nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

再由绝热膨胀过程（2→3）中， $(\frac{V_3}{V_2})^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}$ ；绝热膨胀压缩过程（4→1）中， $(\frac{V_4}{V_1})^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}$ 。于是

卡诺热机的效率为：

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

由于 $\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1}$ ，即 $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$ ，所以有：

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

(4) 热力学第二定律：不可能从单一热源吸收热量，使之完全变为有用功而不产生其他影响。

(5) 卡诺定理：热机的最大效率只与高温热源和低温热源的温度有关。即假设高温热源的温度为 T_1 ，低温热源的温度为 T_2 ，则所有在这两热源之间工作的热机的效率都不会大于两热源之间的卡诺热机效率：

$$\eta \leq \eta_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

例 7、(2020 清华强基) 热机的斯特林循环由温度 T_1 和 T_2 的等温过程和体积为 V_1 和 V_2 的定容过程围成。已知工作物质为一定量的双原子分子气体，且 $T_1 = 800\text{K}$ 、 $T_2 = 300\text{K}$ ， $V_2/V_1 = 2.73$ 。则该循环的效率为？

分析与解：体积为 V_1 的等容过程吸热：

$$Q_{11} = \nu c_{V,m}(T_1 - T_2) = \frac{5}{2}\nu R(T_1 - T_2)$$

温度 T_1 的等温过程吸热：

$$Q_{12} = -W = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

因此总吸热量为：

$$Q_1 = Q_{11} + Q_{12} = \frac{5}{2}\nu R(T_1 - T_2) + \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

同理，总放热量为：

$$Q_2 = \frac{5}{2}\nu R(T_1 - T_2) + \nu RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

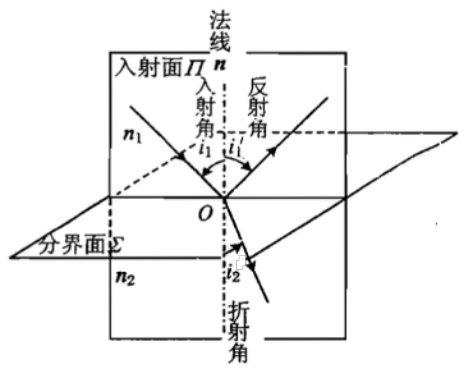
因此该循环的效率为：

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{5}{2}(T_1 - T_2) + T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}{\frac{5}{2}(T_1 - T_2) + T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 24.45\%$$

四、光学篇

1、几何光学的基本定律

(1) 光的直线传播定律：在均匀介质中，光沿直线传播。



(2) 光的反射定律：反射光线在入射面内，且反射角等于入射角，即

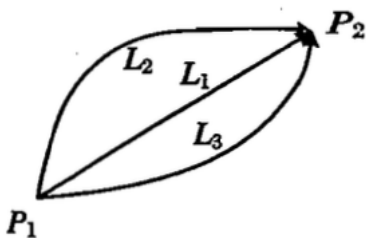
$$i = i'$$

(3) 光的折射定律：折射光在入射面内，且有

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

其中， n_1 和 n_2 分别为两种介质的折射率， i_1 、 i_2 分别为入射角与折射角。

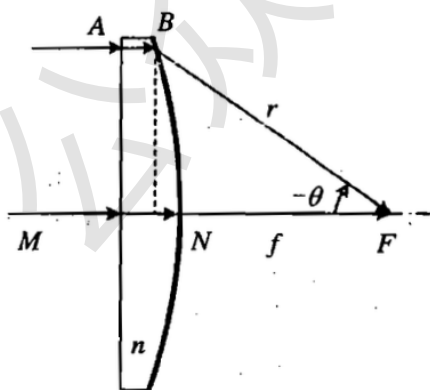
(4) 光路可逆性原理：在均匀介质中，光可以从P点沿直线传播到Q点，则必定可以沿相反的路径从Q点传播到P点。



(5) 光程等于折射率与光所经过的路程的乘积。记 n 为折射率， S 为光的路径的长度，则光程即为 $L = nS$ 。费马原理：两点间光的实际路径是光程平稳的路径。

(6) 全反射：由折射定律， $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ ，可得 $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ 。如果 $n_1 > n_2$ ，则当 $\sin i_1 \geq \frac{n_2}{n_1}$ ，折射光实际上不存在，只有反射光。

例 1、如图，设计了一种平凸聚光透镜，使其可以沿透镜光轴入射的平行光全部汇聚到一点。试求出图中各量满足的关系。



分析与解：由费马原理知上下两条光线光程一致：

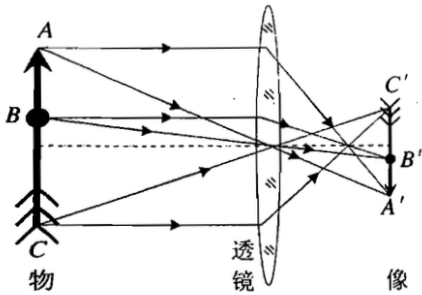
$$r = n \cdot (r \cos \theta - f) + f$$

于是得各量满足的关系：

$$(n - 1) \cdot f = (n \cos \theta - 1) \cdot r$$

2、透镜与透镜组的成像

(1) 焦平面指的是过透镜组的物方焦点和像方焦点，且与光轴垂直的虚拟平面。从物方焦平面上一点射出的光线，经透镜折射后会在像方处形成一束平行光；一束平行光从物方经过透镜后会聚焦到像方焦平面上的一点。平行光的角度由焦平面上的点与透镜的中心点连线方向确定，这是因为经过透镜中心点的光线传播方向不变。



(2) 透镜成像公式：

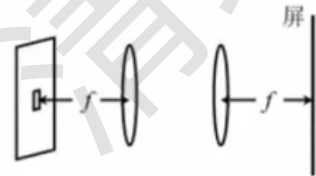
$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

其中 u 为物距， v 为像距， f 为透镜的焦距。正负号约定： u 位于透镜左侧为正， v 位于透镜右侧为正，凸透镜 f 为正。透镜成像的放大率可以表述为：

$$M = -\frac{v}{u}$$

放大率 M 的正负号代表像与物之间的正倒关系。

例 2、(2021 清华强基) 光线通过矩形小孔发光，通过两个相同的凸透镜，打在屏幕上，如图所示，则 (BC)



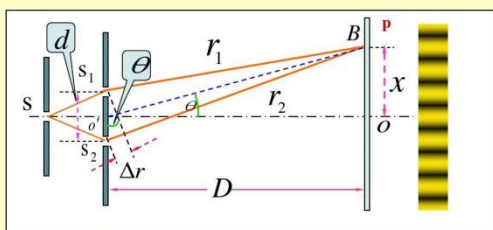
- A、产生的图案为矩形，且原孔长边对应短边
- B、产生的图案为矩形，且原孔短边对应短边
- C、孔向上移，图案下移
- D、孔向上移，图案上移

分析与解：为了分析矩形小孔成像过程中物与像的长短边对应关系，我们可以把长边单独看成一个物去分析其光路，非常容易得到长边对应的物经过透镜组成像后还是位于长边位置。且像与物正倒关系相反，大小相等。因此 B 正确，A 错误。分析 CD 选项，分析矩孔中心的成像点即可，同理知 C 正确，D 错误。当然也可以用透镜组的放大率公式去求解，具体求解如下，取任意物点，对第一个透镜有： $u = f$ ，带入透镜成像公式得： $v = +\infty$ 。因此对于第二个透镜有： $u = -\infty$ ，带入透镜成像公式得： $v = f$ 。即透镜组成像正好位于屏上，透镜组的放大率为：

$$M = M_1 \cdot M_2 = -1$$

即透镜组成的像与物等大反向，因此选项 BC 正确。

3、光的干涉



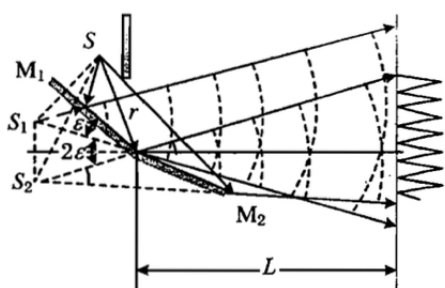
$$x = \begin{cases} \pm k \frac{D}{d} \lambda & \text{明纹} \\ \pm \frac{D}{d} (2k+1) \frac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(1) 杨氏干涉：普通光源先经过一个不透光挡板的狭缝，再经过一个不透光挡板的双狭缝，则在双缝之后的接收屏上就可以观察到明暗交错的干涉条纹。

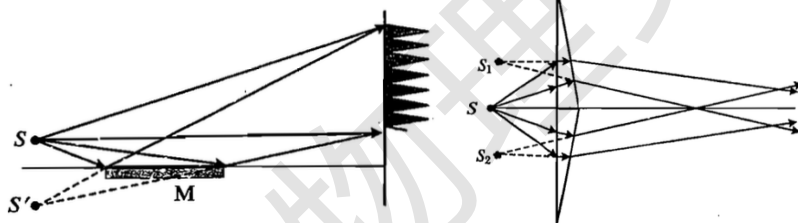
干涉条纹的间距为：

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$$

(2) 类杨氏干涉：单一光源通过镜组成对称双点光源，然后再进行干涉。



菲涅耳双面镜



劳埃德镜

菲涅耳双棱镜

(3) 半波损失：当光线从光疏介质射向光密介质时，反射光线相对于入射光线相位突变 π 。光疏介质对应折射率小，光密介质对应折射率大。

(4) 薄膜干涉：薄膜干涉分为等倾干涉和等厚干涉。

1) 等倾干涉：如图所示，一光线通过厚度均匀的薄膜，发生直接反射得到光线1与经历透-反-透得到光线2，光线1与2之间发生干涉而在屏幕上形成不同的亮暗条纹。光线1与2之间的光程差为：

$$\delta = 2d \left(\frac{n_2}{\cos r} - n_1 \tan r \sin i \right) = 2n_2 d \cos r$$

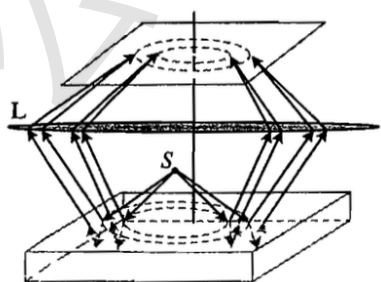
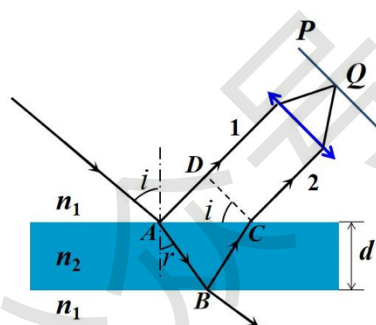
干涉增强出现亮条纹的条件为：

$$2n_2 d \cos r = \left(j + \frac{1}{2} \right) \lambda$$

j 为等倾干涉级数， λ 为光线的波长， $\frac{1}{2}\lambda$ 项是由于上下表面反射的半波损失而引起。

实验中一般选取左图为实验装置，光源发出的光线经薄膜的两个面反射后，具有相等倾角的光在接收屏上形成一个圆环，这些圆环的

中心位于透镜的光轴上。



2) 等厚干涉：如图所示，等厚干涉一般是研究小倾角薄膜的干涉。因此让入射光垂直底面入射，近似认为光线直上直下反射与透射，因此厚度 h_j 处的两束反射光的光程差为：

$$\delta = 2nh_j$$

其中 n 为薄膜的折射率。

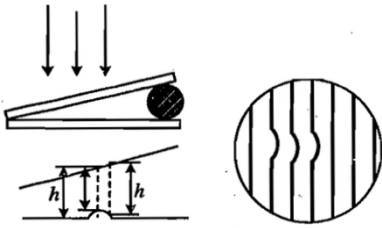
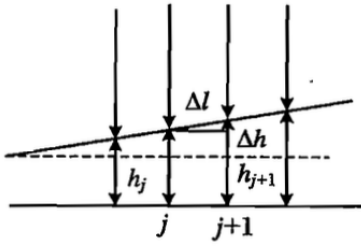
考虑半波损，则亮条纹出现的条件为：

$$2nh_j = (2j + 1) \frac{\lambda}{2}$$

因此相邻两个条纹间的厚度差为

$$\Delta h = \frac{\lambda}{2n}$$

楔形薄膜可用于检测表面是否平整，以及确定凸凹，如左图所示。



(5) 牛顿环：机理与薄膜干涉类似，在一玻璃平板上放一平凸透镜，则两者之间就形成了一层空气薄膜。从上方垂直入射的光，由于分别被空气膜的上下两个表面反射，于是就产生了干涉。半径 r_j 处对应的空气膜厚度为 h ，则由几何关系近似后可得：

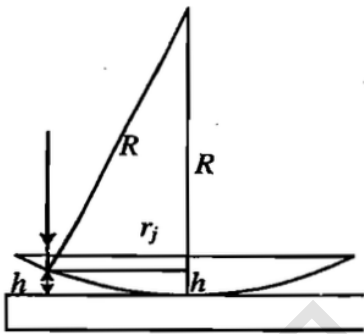
$$h = \frac{r_j^2}{2R}$$

因此考虑半波损后，亮纹位置满足：

$$2h = j\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

即牛顿环亮环半径：

$$r_j = \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)\lambda R}$$



$j = 0, 1, 2$ 为牛顿环亮环的级数。

例 3、(2020 清华强基改编) 已知两束平行的波长为 λ 的相干光束入射在一屏上，光线1斜向右上方射向屏，光线2斜向右下方射向屏，它们与屏法线的夹角分别为 α 和 β ，两者均为小角。则屏上相邻干涉条纹的间距为 (B)

A、 $\frac{\lambda}{\cos \alpha + \cos \beta}$

B、 $\frac{\lambda}{\alpha + \beta}$

C、 $\frac{2\lambda}{\sin \alpha + \sin \beta}$

D、以上都不对

分析与解：假设在屏上某点为相干增强处，考虑该点上方 Δx 处的干涉情况，第一束平行光（与屏法线的夹角为 α ）光程落后 $\Delta x \sin \alpha$ ，第二束光（与屏法线的夹角为 β ）光程领先 $\Delta x \sin \beta$ ，因此有光程差：

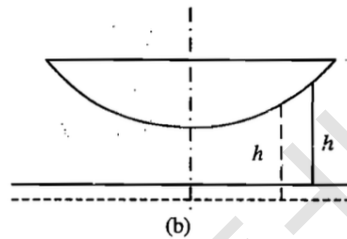
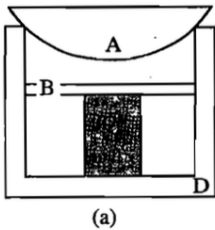
$$\delta = \Delta x(\sin \alpha + \sin \beta)$$

当光程差为整数倍波长时，干涉点为相干增强，因此相邻两个干涉条纹间距为：

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \alpha + \sin \beta} \approx \frac{\lambda}{\alpha + \beta}$$

最后一步用到了 α 和 β 为小角的小量近似。

例4、如图（a）所示，A为平凸透镜，B为平板玻璃，C为金属柱，D为框架，A、B之间留有气隙，而A被固定在框架的边缘上。温度变化时，C发生伸缩，而假设A、B、D都没有伸缩。现用波长为 $\lambda = 632.8nm$ 的激光垂直照射。



(1) 在反射光中观察时，看到牛顿环的条纹都移向中央，这表明金属柱C的长度是增加还是缩短？

(2) 如果观察到有10个明条纹移到中央而消失，C的长度变化了多少毫米？

分析与解：(1) 条纹都移向中央表明温度变化后中央对应的空气层间隔等于温度变化前外圈对应的空气层间隔，也就是说中央空气层间隔增大，所以金属柱C的长度缩短。(2) 10个明条纹移到中央而消失意味着中央空气层长度变化导致光程变化了10个波长，假设C的长度变化了 Δl ，即得到关系式：

$$2\Delta l = 10\lambda$$

即得到C的长度变化了：

$$\Delta l = 5\lambda = 3.164 \times 10^{-3}mm$$

五、狭义相对论

1、狭义相对论的基本原理与爱因斯坦时空观

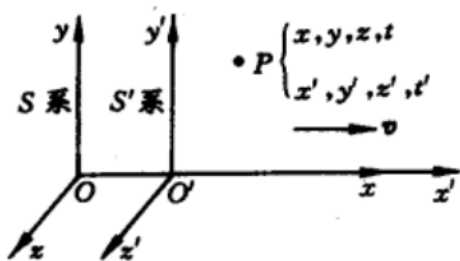
(1) 狭义相对论的基本原理:

- 1) 相对性原理: 在所有惯性系中, 物理学定律具有相同的表达形式。
- 2) 光速不变原理: 在所有惯性系中, 真空光速具有相同量值, 与光源的运动无关。

(2) 爱因斯坦时空观:

伽利略时空变换是以牛顿力学的绝对时空观为前提建立起来的, 绝对时空观认为时间是一个独立存在的绝对量, 时间与参考系的选取无关。但爱因斯坦认为, 时间概念与空间概念一样, 也只具有相对的意义, 在不同的参考系有不同的时间。

2、狭义相对论时空变换



取地面系为静系S系, 另一惯性系为动系S'系。则质点P在S以及S'系中的坐标分别为 (x, y, z, t) 以及 (x', y', z', t') 。狭义相对论理论下, 上述坐标满足洛伦兹正变换(用S系参量表述S'系参量):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

其中 v 是S'系相对S系沿 x 方向的运动速度。 $\beta = \frac{v}{c}$ 是一个相对论问题中常用的无量纲量, 用以描述速度与光速的比值。对称地, 有洛伦兹逆变换(用S'系参量表述S系参量):

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

实际上, 我们在解题过程中经常运用坐标差值的洛伦兹变换, 即

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$
$$\Delta x = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z', \quad t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

3、动尺收缩与动钟变慢

(1) 动尺收缩效应: 动尺收缩强调的是在一个在S系中沿 x 轴高速运动的尺子, 测量者在S系中同时测量其首端与尾端, 得到的首端与尾端的 x 坐标差:

$$\Delta x = l = l_0\sqrt{1 - \beta^2}$$

其中 l_0 为尺子原长, 即在与尺子一同运动的惯性系S'系中测量首端与尾端的坐标差 $\Delta x'$ 。

证明：在测量过程中，我们把测量首端当作事件1，测量尾端当作事件2。那么分别在S系和S'系去考察这两个事件的坐标，不难得到：

$$\Delta x' = l_0, \Delta x = l, \Delta t = 0$$

$\Delta t = 0$ 的原因是测量动尺长度，就应该在S系中同时测其首端和尾端，事件1和事件2在S系中发生的时刻一致。将上述值带入坐标差值的洛伦兹正变换，得到：

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

即：

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

(2) 动钟变慢效应：动钟变慢强调的是在一个在S系中沿x轴高速运动的时钟，测量者在与时钟一同运动的惯性系S'系中测得时钟走过时间 t_0 ，则在静系S系中测得时钟走过的时间：

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

证明：在测量过程中，我们把时钟开始计时当作事件1，时钟终止计时当作事件2。那么分别在S系和S'系去考察这两个事件的坐标，不难得到：

$$\Delta x' = 0, \Delta t' = t_0, \Delta t = t$$

$\Delta x' = 0$ 的原因是，时钟开始和终止这两个事件，在S'系中发生的坐标不变（时钟在S'系中静止在原点）。将上述值带入坐标差值的洛伦兹逆变换，得到：

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

即：

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

4、狭义相对论的速度变换

对坐标变换进行微分与整合，可以得到S与S'系中速度变换公式如下：

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \quad u_y' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot u_y}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \quad u_z' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot u_z}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'}, \quad u_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot u_y'}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'}, \quad u_z = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot u_z'}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'}$$

要注意虽然y, z方向在洛伦兹坐标变换中不变，但在速度变换中由于时间t的变化而相应要作变换。

例 1、(2020 清华强基) 已知地球半径为 6000km ，在距离地心 12000km 的飞船上的钟一天比地球上的钟计时偏差为 (A)

- A、 $14\mu\text{s}$
- B、 140ns
- C、 2400fs
- D、 24000ps

分析与解：设地球半径为 R ，则飞船的环绕速度：

$$v = \sqrt{\frac{GM}{2R}} = \sqrt{\frac{gR}{2}}$$

由钟慢效应公式以及小量近似得：

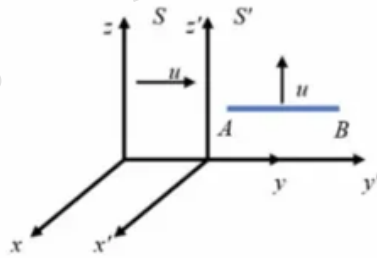
$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = t_0 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

得到计时偏差：

$$\Delta t = t - t_0 = \frac{1}{2}\beta^2 t_0 = 1.44 \times 10^{-5}\text{s} = 14.4\mu\text{s}$$

故选 A

例 2、(2021 清华强基) 如图所示， S' 系相对 S 系沿 y 轴正方向的速度为 u ， S' 系中有一轻杆沿 z' 轴正方向运动，速度也为 u 。考虑相对论效应，在 S 系看来轻杆的形态如何 (BD)



- A、杆倾斜，B 端偏上，A 端偏下
- B、杆倾斜，B 端偏下，A 端偏上
- C、杆不倾斜
- D、杆的整体长度缩短

分析与解：在这道题要注意， x 、 y 坐标轴换了位置，不能死记硬背洛伦兹变换式，要知道位移坐标变换只在相对运动方向上存在即可。以测 A 为事件1，测 B 为事件2，则有：

$$\Delta y' = l_0, \Delta t = 0$$

因为无论 $\Delta t'$ 为多大，都会满足 $\Delta y' = l_0$ 。因此算得：

$$\Delta y = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\Delta t' = -\frac{l_0}{u} \beta^2$$

考虑到在 S' 系中 $\Delta t' = -\frac{l_0}{u} \beta^2$ ，则有 z 方向的洛伦兹变换：

$$\Delta z' = \Delta z = -l_0 \cdot \beta^2$$

因此在 S 系看来轻杆 B 端偏下， A 端偏上。且轻杆的长度为：

$$l = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = l_0 \sqrt{1 - \beta^2 + \beta^4} < l_0$$

因此选择 BD

例 3、在惯性系 S 中观察到两事件发生在同一地点，时间先后差 $2s$ 。在另一相对于 S 系运动的惯性系 S' 中观察到两事件之间的间隔为 $3s$ 。试求 S' 系相对于 S 系的速度大小 v 和在 S' 系中测得的两事件之间的距离 d

分析与解：直接分析这两个事件，有以下关系：

$$\Delta t = 2, \Delta x = 0, \Delta t' = 3$$

由洛伦兹变换：

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

得到：

$$v = \frac{\sqrt{5}}{3} c$$

则 S' 系中测得的两事件之间的距离 d 为：

$$d = \Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\sqrt{5} \cdot c$$

例 4、已测得某介子静止时的平均寿命为 $\tau_0 = 2.5 \times 10^{-8}s$ 。实验室获得的该介子速度为 $(1 - 5 \times 10^{-5})c$ ，试求它可通过的平均距离 l 。

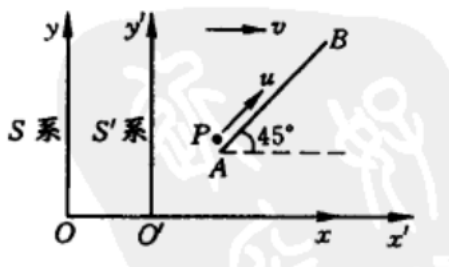
分析与解：动钟延缓得到该介子实验室系的寿命：

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

则利用小量近似得到通过的平均距离 l 为：

$$l = v\tau = c \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{3 \times 10^8 \times 2.5 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - (1 - 1 \times 10^{-4})}} = 750m$$

例 5、惯性系 S' , S 间的关系如图所示。静长为 l 的直尺 AB 静止于 $x'y'$ 平面, 且与 x' 轴夹角为 45° , 质点 P 沿杆运动, 相对于杆的速率 u 为常量, 试在 S' , S 系分别计算 P 从杆的 A 端到 B 端所经时间 T' , T



分析与解: 我们用坐标变换和速度变换两种方法来计算这道题。首先用坐标变换, 事件1为质点从 A 点出发, 事件2为质点运动到 B 点。则有关系:

$$\Delta t = T, \Delta x' = \frac{\sqrt{2}}{2}l, \Delta t' = T' = \frac{l}{u}$$

于是带入洛伦兹逆变换公式:

$$T = \frac{\frac{l}{u} + \frac{\sqrt{2}}{2}l \cdot \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

现在用速度变换的方法去计算 T , 考虑到 y 方向的洛伦兹坐标变换与速度变换:

$$\Delta y = \Delta y' = \frac{\sqrt{2}}{2}l$$

$$u_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \cdot u_y'}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}u}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{\sqrt{2}}{2}u}$$

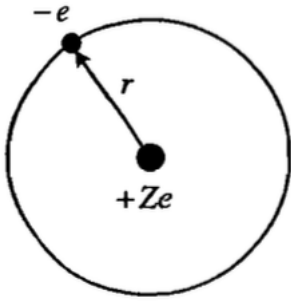
则 T 为:

$$T = \frac{\Delta y}{u_y} = \frac{\frac{1}{u} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot l$$

两种方法结果一致。

六、近代物理篇

1、玻尔的氢原子模型



(1) 电子绕原子核做圆轨道运动的动力学方程，如图所示，有：

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

其中， Z 为核电荷数，由上式可得电子的动能为：

$$E_k = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

原子的总能量包括电子的动能 E_k 和电子与核之间的库仑势能 E_p ，则其总能量为：

$$E = E_k + E_p = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

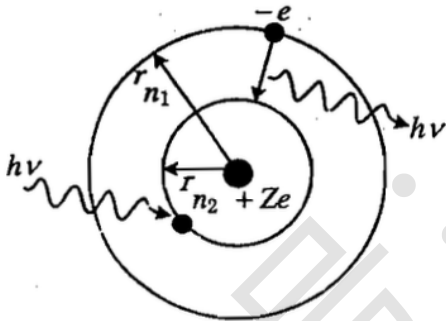
(2) 定态条件：原子中的电子只能处于一系列分立的圆轨道上，绕核转动；电子在固定的轨道上运动时，不辐射电磁波。这些分立的轨道，称作定态轨道，其半径可以记为 r_n ，这时原子的能量为：

$$E_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n}$$

由于轨道是分立的，故原子的能量也是分立的，即是量子化的。这些量子化的能量称作能级。

(3) 频率条件：电子可以在不同的定态轨道之间跃迁，原子的能量也发生相应的改变，即原子可以在不同的能级之间跃迁。当原子的能量改变时，就以电磁波的形式辐射或吸收能量。根据爱因斯坦光量子的能量表达式

$E = h\nu$ ，其中， $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ 为普朗克常量， ν 为电磁辐射的频率。原子从定态 E_{n_1} 跃迁到另一个定态 E_{n_2} 时，如图所示，与电磁辐射频率之间的关系为：



$$h\nu = E_{n_1} - E_{n_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{n_2}} - \frac{1}{r_{n_1}} \right)$$

(4) 角动量子化条件：电子轨道运动的角动量是量子化的，只能取一些特定的数值，即：

$$L_n = mvr_n = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

其中 \hbar 为约化普朗克常数，满足 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

将角动量子化条件带入动力学方程中，便可以得到定态轨道半径 r_n ：

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 (n\hbar)^2}{m_e Ze^2}$$

那么原子的轨道能级、定态轨道半径、各能级之间跃迁产生的光频率均可求解。

例 1、(2020 清华强基) 电荷量为 Ze 的负粒子绕氢原子核转动形成玻尔模型，则其第 n 个定态的能量为？

分析与解：由前述公式得，第 n 个定态的轨道半径为：

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0(n\hbar)^2}{m_e Z e^2}$$

带入原子能量公式得：

$$E_n = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{32\pi^2 \epsilon_0^2 n^2 \hbar^2}$$

例 2、(2020 清华强基) 氢原子核外电荷若被另一粒子取代，已知它的质量是电子的 207 倍，电荷与电子相同，则与电子相比，其基态的能量、角动量、轨道半径分别为原先的多少倍？

分析与解：这里涉及到折合质量的概念。我们考虑电子绕着原子核转动，提前假设了原子核静止不动。但实际上氢原子核的质量 M 是电子质量 m_e 的 1837 倍，氢原子核与电子共同绕质心转动，只不过氢原子核的圆周运动半径比较小而已。那么为了把这个细微的修正也考虑进去，我们可以引入折合质量的概念，即如果把电子的质量 m_e 变为一个折合质量：

$$\mu = \frac{m_e M}{M + m_e}$$

这个时候就可以把氢原子核当作静止不动来处理。于是有氢原子基态轨道半径和基态能量的表达式：

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2}$$
$$E_1 = -\frac{\mu \cdot e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$$

角动量量子化条件告诉我们基态角动量在变化前后都不会发生变化，基态能量与轨道半径的变化只是折合质量发生了变化，假设取代后核外电荷的折合质量为 μ' ，取代前核外电荷的折合质量为 μ ，因此有：

$$\mu = \frac{1837}{1838} m_e = 0.9995 m_e$$
$$\mu' = \frac{1837 \times 207}{1837 + 207} m_e = 186.04 m_e$$

基态能量为原来的倍数：

$$\frac{\mu'}{\mu} = 186.13$$

轨道半径为原来的倍数：

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{1}{186.13}$$